Baccalauréat C Aix–Marseille juin 1978

EXERCICE 1

Un plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On appelle D (respectivement Δ) la droite passant par O dont un vecteur directeur est
$\vec{u} = \vec{\imath}\cos\theta + \vec{\jmath}\sin\theta$ (respectivement $\vec{v} = \vec{\imath}\cos\theta - \vec{\jmath}\sin\theta$.

1. Pour tout point M de P, démontrer qu'il existe un et un seul bipoint (P, Q) dont M soit le milieu tel que P $\in$ D et Q $\in \Delta$.
2. On appelle Q$'$ (respectivement P$'$) le projeté orthogonal de P (respectivement Q) sur Δ (resp. D) et M' le milieu du bipoint (P$'$, Q$'$).
   On désigne par S l'application de P dans P telle que $S(M) = M'$.
   Démontrer que S est bijective.
3. On pose $\overrightarrow{\text{O}P} = r\,\vec{u}$, $\quad \overrightarrow{\text{O}Q} = r'\,\vec{v}$.
   Calculer en fonction de r, r', θ, les coordonnées $(x\,;\ y)$ de M et $(x'\,;\ y')$ de M'.
4. Démontrer que S est une similitude indirecte dont on précisera le centre, l'axe et le rapport.

EXERCICE 2

Soit E l'ensemble des triplets $X = (p,\ q,\ r) \quad \left(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}^\star\right)$ tels que $p^2 + q^2 = r^2$.
On définit l'application f de E dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes telle que

$$X \in E \longmapsto f(X) = \frac{p + \text{i}q}{r} = Z.$$

1. Calculer $|Z|$.
   Montrer que, dans E, la loi notée $\star$, définie par
   $$X_1 \star X_2 = \left(p_1 p_2 - q_1 q_2,\ p_2 q_1 + p_1 q_2,\ r_1 r_2\right)$$
   avec $X_1 = \left(p_1,\ q_1,\ r_1\right)$ et $X_2 = \left(p_2,\ q_2,\ r_2\right)$ est une loi de composition interne.
   Calculer $f\left(X_1 \star X_2\right)$. Montrer que f est un homomorphisme de (E, $\star$) dans ($\mathbb{C}$, $\cdot$).
2. Vérifier que si $X_0 = (3,\ 4,\ 5)$, $\quad X_0 \in$ E.
   Calculer $X_0 \star X_0$, $\quad X_0 \star \left(X_0 \star X_0\right)$.
   En déduire deux solutions, autres que X_0, en nombres entiers positifs de l'équation $p^2 + q^2 = r^2$.

PROBLÈME

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
F désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On rappelle que F muni de l?addition et de la multiplication par un réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Partie A

1. Soit u la fonction affine définie par :
   $$x \in \mathbb{R} \longmapsto u(x) = ax + b \quad (a,\ b) \in \mathbb{R}^2.$$
   Montrer que u vérifie la relation
   $$(\forall (x\,;\ y),\ (x\,;\ y) \in \mathbb{R}^2), \quad |u(x) - u(y)| \leqslant |a||x - y|.$$

2. Soit V la fonction définie par :

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto V(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

Montrer que V vérifie la relation

$$(\forall (x\,;\,y),\,(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2), \quad |V(x) - V(y)| \leqslant |x-y|.$$

3. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et bornée sur $\mathbb{R}$:

$$(\exists M,\, M \in \mathbb{R}_+),\,(\forall t,\, t \in \mathbb{R}), |f(t)| \leqslant M.$$

a. Montrer qu'il existe une fonction F, continue sur $\mathbb{R}$, définie par

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Montrer que

$$(\forall (x\,;\,y),\,(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2), \quad |F(x) - F(y)| \leqslant M[x-y|.$$

c. En déduire que les applications F_1 et F_2 définies par

$$\begin{array}{llll} F_1: & x & \longmapsto & \sin x, \\ F_1: & x & \longmapsto & \text{Log}\,(\mathrm{e}^x+1) \end{array}$$

vérifient respectivement

$$(\forall (x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2) \quad \left|F_1(x) - F_1(y)\right| \leqslant |x-y|, \quad \left|F_2(x) - F_2(y)\right| \leqslant |x-y|.$$

Partie B

On se propose d'étudier l'ensemble (L) des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la proposition :

$$(\forall f, f \in (L)), (\exists \lambda_f,\, \lambda_f \in \mathbb{R}_+), (\forall (x\,;\,y),\,(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \lambda_f |x-y|.$$

1. Montrer que (L) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathscr{F}, +, \cdot)$.

2. Établir que $(\forall f_1,\, f_1 \in (L)), (\forall f_2,\, f_2 \in (L)), f_2 \circ f_1 \in (L)$ où $\circ$ désigne la composition des applications.

3. Montrer que toute application de (L) est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Partie C

1. Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \longmapsto \varphi(x) = \pi + \frac{1}{3}\sin x.$$

Vérifier que

$$\forall (x\,;\,y),\,(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \frac{1}{3}|x-y|.$$

2. Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$,

$$(\forall n \in \mathbb{N}^\star),\, u_n = \varphi(u_{n-1}).$$

Établir que $(\forall n \in \mathbb{N}), |u_n - \pi| \leqslant \dfrac{1}{3^n}|u_0 - \pi|$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente. Donner sa limite.

Partie D

On définit les deux applications suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{llll}\theta : & x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-x^2}\\ G : & x & \longmapsto & G(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\end{array}$$

1. Étudier la fonction θ. Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Démontrer que $(\forall t,\ t \in \mathbb{R})$, $\quad \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant 1$.
   En déduire que G appartient à (L).
3. Démontrer que G est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
   Étudier le sens de variation de G.
4. Établir que

   $$(\forall x,\ x > 1),\quad \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   En déduire que la fonction G est bornée et admet une limite ℓ (qu'on ne calculera pas) lorsque x tend vers $+\infty$.