Durée : 4 heures

Baccalauréat C Aix en Provence septembre 1969

EXERCICE 1

Étudier les restes de la division par 7 des nombres

$$2^n \quad \text{et} \quad 3^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

et résoudre alors l'équation

$$2^x + 3^x \equiv 0 \quad (\text{mod } 7),$$

où x est un entier positif eL où le symbole $\equiv$ désigne une relation de congruence.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie pour x réel par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x+a),$$

où a est une constante réelle, dont on calculera la valeur, sachant que $f'(-1) = 0$.

1. Variation et représentation graphique de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}x,\ \mathrm{O}y)$.
2. Calculer A et B pour que $(Ax+B)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de f.
   Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe, l'axe Ox et les parallèles à Oy d'abscisses -2 et -1.

PROBLÈME

Le mouvement d'un point M est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}x,\ \mathrm{O}y)$. Les coordonnées, x et y, de M sont exprimées en fonction du temps t par

$$x = \mathrm{tg}^2\, t - 1 \quad \text{et} \quad y = 2\,\mathrm{tg}\, t \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right[.$$

1. Déterminer analytiquement la trajectoire. La construire dans le repère donné. Préciser ses éléments géométriques.
2. Soit $\overrightarrow{MV}$ le vecteur vitesse à la date t. Calculer en fonction de t le module et l'argument de chacun des nombres complexes z et Z ayant pour images respectives les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ et $\overrightarrow{MV}$.
3. Calculer le nombre complexe Z' dont l'image est le vecteur $\overrightarrow{MN}$ transformé de $\overrightarrow{MV}$ par la similitude directe de centre M, de rapport $k = \cos^2 t$ et d'angle $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$.
   En déduire les coordonnées de N en fonction de t. Étudier l'ensemble des points N quand t varie. Expliquer géométriquement le résultat obtenu.
4. M étant la position du mobile à la date t $\left(-\dfrac{\pi}{2} < t < 0\right)$ et M_1 sa position à la date $t_1 = t + \dfrac{\pi}{2}$, montrer que M, O et M_1 sont. alignés et que les vecteurs $\overrightarrow{MV}$ eL $\overrightarrow{M_1V_1}$ (vecteurs vitesse aux dates t et t_1) ont des supports perpendiculaires.
   Quel est, quand t varie, l'ensemble des points R, conjugués harmoniques de O par rapport à M et M_1 ?

5. On transforme M et M_1 respectivement en P et P_1 par l'inversion de pôle O et de puissance 4. Soit I le milieu de PP_1.
   Calculer les affixes des points P, P_1 et I en fonction de t. En déduire l'ensemble des points I quand t varie. Retrouver géométriquement ce résultat.