

♣ Baccalauréat C Aix-Marseille septembre 1980 ♣

EXERCICE 1

On considère un dé cubique dont les faces portent les nombres (-2) , (-2) , 1 , 1 , 1 , a . Chaque face a la même probabilité d'apparition.

1. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque lancer du dé fait correspondre le nombre apparu. Donner la loi de probabilité p de X , suivant les valeurs de a . Déterminer l'espérance mathématique de X ; pour quelle valeur de a est-elle nulle?
2. Dans cette question on suppose que $a = 1$; on lance le dé trois fois de suite et on désigne par Y la variable aléatoire qui à chaque épreuve fait correspondre la somme des trois nombres apparus. Déterminer la loi de probabilité q de Y . Déterminer la fonction de répartition de Y .

EXERCICE 2

Soit z_0, z_1, z_2 les racines dans \mathbb{C} de l'équation $g(z) = 0$ avec

$$g(z) = z^3 - 10iz^2 - 4(3 - 4i)z + 40(4 + 3i).$$

1. Sachant que z_0 est imaginaire pur ($z_0 = ie^x, e^x \in \mathbb{R}$), déterminer $f(z)$ telle que $(z - z_0)f(z) = g(z)$.
En déduire le calcul de z_1 et z_2 (on notera z_1 celle des racines qui a sa partie réelle positive).
2. On désigne par M_1, M_2 et M_3 les images respectives dans le plan complexe de z_0, z_1 et z_2 .
 - a. Déterminer l'affixe de l'isobarycentre du triangle $M_0M_1M_2$.
 - b. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S qui laisse M_0 invariant et telle que $M_2 = S(M_1)$.

PROBLÈME

Partie A

On rappelle que l'ensemble \mathcal{M}_2 des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , le même ensemble muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau unitaire; on notera e et 1 respectivement la matrice nulle et la matrice unité.

1. Étant donné l'élément $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ de \mathcal{M}_2 , on considère l'ensemble

$$E = \{M \mid M \in \mathcal{M}_2, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, M = aA + bI.\}$$

- a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathcal{M}_2 dont une base est (A, I) .
 - b. Vérifier que $A^2 = -A + 2I$; en déduire que la multiplication est une loi de composition interne dans E et que E muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau commutatif unitaire, que A est inversible et que A^{-1} appartient à E .
2. a. Vérifier que dans E l'équation $X^2 = X$ admet quatre solutions, la matrice nulle θ , la matrice unité I , et deux autres matrices P et Q que l'on exprimera dans la base (A, I) .
On désignera par P celle qui est de la forme $k(A - I)$, $k \in \mathbb{R}$.
Vérifier que $PQ = QP = \theta$ et que $P + Q = I$. Déterminer les coefficients des matrices P et Q .

- b. Démontrer que (P, Q) est une base de E . Comment s'expriment I, A , le produit des matrices $M = \alpha P + \beta Q$ et $M' = \alpha' P + \beta' Q$, la matrice M^n dans cette base.
- c. Démontrer que $M = \alpha P + \beta Q$ est inversible si, et seulement si, $\alpha\beta \neq 0$. Exprimer alors M^{-1} dans la base (P, Q) .
3. Démontrer que dans E l'équation $X^2 = I$ admet quatre solutions $I, -I$ et deux autres solutions S et $-S$ que l'on exprimera dans la base (P, Q) . Déterminer les coefficients des matrices S et $-S$.
4. Soit π un plan vectoriel muni d'une base (\vec{i}, \vec{j}) et soit g l'endomorphisme de π dont la matrice dans cette base, est $G = \frac{1}{2}P + \frac{1}{3}Q$.
 \vec{V}_0 étant un élément de π et, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\vec{V}_{k+1} = g(\vec{V}_k)$, on pose

$$\vec{W}_k = \sum_{k=0}^n \vec{V}_k.$$

Calculer les coordonnées u_n et v_n de \vec{W}_n en fonction de x_0 et y_0 , coordonnées de \vec{V}_0 , et de n . Quelles sont les limites de u_n et v_n lorsque n tend vers l'infini.

Partie B

On rappelle que l'ensemble \mathcal{F} des applications de \mathbb{R} vers \mathbb{R} muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel de \mathbb{R} . On considère les deux éléments de \mathcal{F} , u et v définis par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = e^{-\frac{x}{2}}, \quad v(x) = -xe^{-\frac{x}{2}}.$$

1. On considère l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{F}, \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f = \alpha u + \beta v\}.$$

- a. Montrer que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{F} dont une base est (u, v) .
- b. On note d et l les applications définies par

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{E}, \quad d(f) &= f' \text{ fonction dérivée} \\ l(f) &= f' + \beta v \text{ si } f = \alpha u + \beta v. \end{aligned}$$

Montrer que d et l sont des endomorphismes de \mathcal{E} , dont on déterminera les matrices respectives D et L dans la base (u, v) .

Vérifier que $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot D$. En déduire D^{-1} , puis que tout élément de \mathcal{E} admet une primitive dans \mathcal{E} .

2. a. Étudier les variations de la fonction f , élément de \mathcal{E} définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (1-x)e^{-\frac{x}{2}}.$$

Tracer sa courbe représentative dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- b. Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la portion du plan P , ensemble des points M dont les coordonnées vérifient

$$\begin{cases} 1 & \leq x \leq \lambda \\ f(x) & \leq y \leq 0 \end{cases} \quad \lambda \text{ étant un réel supérieur à } 1$$

Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.