

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Aix-en-Provence septembre 1971 ∞

EXERCICE 1

Résoudre l'inéquation

$$\log_a(x+1) + \log_a(x) < 1$$

[$\log_a(x)$ est le logarithme de x dans la base a].

EXERCICE 2

Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble des points M , d'affixes z , tels que $\frac{z-1}{z+i}$ soit imaginaire pur.

(Raisoner sur la signification géométrique des arguments de $z-1$ et $z+i$ en introduisant les points, d'affixes 1 et $-i$.)

PROBLÈME

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, l'ellipse (E) est définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \text{ et } b \text{ réels fixés } (0 < b < a), \\ t \text{ paramètre } (0 \leq t < 2\pi), \\ \text{coordonnées de } M \text{ de paramètre } t \\ x = a \cos t \text{ et } y = b \sin t. \end{array} \right.$$

1. Montrer que (E) admet une tangente en tout point.
Écrire l'équation de la tangente (D) à (E) au point M de paramètre t (exprimer les coefficients de cette équation en fonction exclusivement de a , b et t).
2. Si t est différent de 0 et de π , calculer les coordonnées des intersections P et Q de (D) avec les tangentes aux sommets du grand axe (qui sont les points de paramètres 0 et π).
Montrer que le cercle de diamètre PQ passe par deux points fixes F et F'.
Quel est l'ensemble des centres de ces cercles quand t varie?
3. La normale en M [c'est-à-dire la perpendiculaire en M à (D)] coupe $x'Ox$ en un point N (si t est différent de 0 et π).
Dans le cas où (D) coupe également $x'Ox$ en un point T , étudier les birapports (F, F', N, T) et (M, T, P, Q).
En déduire une construction géométrique de M quand N est donné. Discuter.