Durée : 4 heures

Baccalauréat C septembre 1974 Aix en Provence

EXERCICE 1

On donne la suite $u = (u_n)$ de terme général

$$u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

e désigne la « base du système des logarithmes népériens ».

1. Montrer que quel que soit n entier naturel $u_n \geqslant 0$.
2. Montrer que u est décroissante.
3. Démontrer que quel que soit n entier naturel

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.$$

En déduire la convergence de la suite u dont on précisera la limite.

EXERCICE 2

$(x\,;\; y)$ désigne un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$, auquel on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$; on note $\overline{z}$ le conjugué de z.

1. Pour quelles valeurs du nombre complexe z, peut-on calculer le nombre complexe Z par

$$Z = \frac{z + 4\mathrm{i}}{\overline{z} - 4\mathrm{i}}\ ?$$

Dans ce cas, calculer $|Z|$ (module du nombre complexe Z).

2. Pour quelles valeurs du nombre complexe z, Z est-il réel ?
Pour quelles valeurs du nombre z, la partie réelle de Z est-elle nulle ?

PROBLÈME

Soit $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ une base d'un plan vectoriel P sur $\mathbb{R}$. Soit f l'endomorphisme de P dont la matrice dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

On désigne par J : P $\to$ P l'application identique et par Ω l'endomorphisme nul
$(\forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{P},\quad \Omega\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0})$.

On suppose $f \neq \mathrm{J}$ et $f \neq \Omega$.

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine associé à P et $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère de $\mathscr{P}$; F est l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ associée à f et telle que $F(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$.

Partie A

Dans toute cette partie, mais seulement dans cette partie, on suppose :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a + d & = & 0 \\ a^2 + bc & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Est-ce que f est bijectif? Montrer que $f \circ f = \Omega$. Déterminer $F \circ F$.
2. Vérifier qu'il existe des endomorphismes f autres que Ω vérifiant les conditions posées au début de cette partie.
   Montrer que tout vecteur de P, d'image non nulle par f, constitue avec son image, une base de P.
   Écrire la matrice de f dans cette base.
3. Montrer que le noyau de f est l'image de f.

Partie B

Soit M un point quelconque de $\mathscr{P}$. On pose $M' = F(M)$ et $M'' = F(M')$.

1. Montrer que le centre de gravité G du triangle $\{M,\ M',\ M''\}$ est O si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcr} a+d & = & -1 \\ ad-bc & = & 1 \end{array}\right.$$

   Montrer que dans ces conditions

$$\forall M \in \mathscr{P},\quad \forall N \in \mathscr{P},\quad \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{0}.$$

2. Déterminer les nombres réels a, b, c, d tels que

$$\left\{\begin{array}{lcr} a+d & = & -1 \\ ad-bc & = & 1 \end{array}\right.$$

   et que $M_0(1~;~1)$ ait pour image par F, $M'_0(1~:~-1)$.
3. Dans les conditions précédentes former une équation dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ de l'ensemble

$$E = \left\{M \in \mathscr{P} |\quad M, M', M'_0 \text{ sont alignés}\right\}$$

   En supposant $\mathscr{P}$ euclidien et le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormé, déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de E.

Partie C

Dans cette partie on suppose $a = 0$, $b = 1$, $c \neq 0$, $d = 1 - c$.
On désigne par M_1 le point de $\mathscr{P}$ de coordonnées $x_1 = 1$, $y_1 = 0$. On considère la suite (M_n) de points de $\mathscr{P}$ telle que

$$\forall n \geqslant 1,\quad M_{n+1} = F(M_n).$$

En désignant par x_n, y_n les coordonnées de M_n calculer x_2, y_2, x_3, y_3.
Montrer que $\forall n \geqslant 1,\quad y_{n+2} = cy_n + (1-c)y_{n+1}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ où $u_n = y_{n+1} - y_n$ est une suite géométrique.
Écrire u_n en fonction de n et c. Exprimer y_n puis x_n en fonction de n et c.
Discuter l'existence d'une limite dans $\mathscr{P}$ pour la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$.