

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Aix-Marseille juin 1972 ∞

EXERCICE 1

5 points

Étudier, suivant la valeur de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne par 6 du nombre 5^n .
Pour quelles valeurs de n le nombre $A = 5^n + 5n + 1$ est-il divisible par 6?

EXERCICE 2

5 points

L'unité de temps est la seconde, l'unité de longueur est le centimètre.

Un point M se déplace dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de façon que, à tout instant $t > 0$, les coordonnées de son vecteur vitesse, \vec{V} , soit

$$x' = \frac{3}{2}\sqrt{t} \quad \text{et} \quad y' = \frac{9}{2} \frac{\ln t}{t}.$$

À l'instant $t = 1$, le point M est en $A(1; 0)$. Calculer les coordonnées, x et y , de M , en fonction de t .
Former l'équation cartésienne de sa trajectoire et construire cette trajectoire.

PROBLÈME

10 points

À chaque couple de réels $(\lambda; \mu)$ on associe l'application f , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , telle que

$$f(x) = (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^x.$$

On désigne ainsi par (\mathcal{F}) l'ensemble des fonctions numériques ainsi définies.

1. Soit (\mathcal{C}) l'ensemble des applications continues, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ; on sait que (\mathcal{C}) , muni des deux opérations, addition des fonctions et multiplication de fonctions par les réels, est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
 - a. Montrer que (\mathcal{F}) est un sous-espace vectoriel de (\mathcal{C}) .
 - b. Démontrer que f est la fonction nulle si, et seulement si, $\lambda = \mu = 0$.
Démontrer que les deux fonctions E_1 et E_2 de (\mathcal{F}) définies par $E_1(x) = e^x \cos x$ et $E_2(x) = e^x \sin x$ constituent une base de l'espace vectoriel (\mathcal{F}) .
2. On sait que toutes les fonctions de (\mathcal{F}) sont dérivables sur \mathbb{R} ;
 - a. Soit f une fonction de (\mathcal{F}) ; démontrer que sa fonction dérivée f' appartient aussi à (\mathcal{F}) .
Soit D l'application, de (\mathcal{F}) dans lui-même, qui, à chaque élément, f , de (\mathcal{F}) , fait correspondre sa fonction dérivée.
Démontrer que D est une application linéaire. Quelle est la matrice de D dans la base (E_1, E_2) ?
 - b. Démontrer que D admet une application réciproque. En déduire que tout élément f de (\mathcal{F}) a une de ses primitives qui appartient à (\mathcal{F}) .
Application : Calculer

$$\int_0^\pi (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^x dx.$$

3. Expliquer sans calcul, pourquoi, étant donné f , élément de (\mathcal{F}) , sa fonction dérivée première f' et sa fonction dérivée seconde f'' , il existe des nombres réels α , β et γ non tous nuls, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 0.$$

Démontrer que l'on peut choisir α , β et γ , non tous nuls et indépendants de f de telle sorte que

$$\forall f \in (\mathcal{F}), \forall x \in \mathbb{R} : \alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 0.$$

4. On considère un plan affine euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
À chaque fonction g , $g : x \mapsto (a \cos x + b \sin x)e^x$ de (\mathcal{F}) on fait correspondre le point de (P) de coordonnées $(a; b)$.
Ainsi, si $M(\lambda; \mu)$ est le point de (P) correspondant à la fonction $f : x \mapsto (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^x$ de (\mathcal{F}) , on note M' le point de (P) associé à la fonction dérivée f' de f .
Caractériser la transformation T de (P) qui, à tout point M , associe le point M' .