Baccalauréat C Aix–Marseille juin 1973

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Linéariser $\cos^7\theta$.
2. Calculer : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta\,\mathrm{d}\theta$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Construire relativement à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$d'un plan affine l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que :

$$16x|x| + 36y\left|y\right| = 576.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

On étudie la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{(mx-1)(2-x)}{x^2-x},$$

où m est un paramètre réel.
À chaque valeur du paramètre m correspond une fonction et une courbe représentative (C_m) relativement à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$.

1. Montrer que, quel que soit m, les courbes (C_m) passent par un point fixe que l'on déterminera.
   Vérifier que pour la valeur (-1) de m la courbe (C_{-1}) présente une axe de symétrie parallèle à $y'\mathrm{O}y$ d'équation $x = \frac{1}{2}$.
2. Trouver l'équation $Y = g(X)$ de le courbe C_{-1} dans un repère orthonormé $\left(\omega,\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ ω étant le point de coordonnées $x = \frac{1}{2}$ et $y = 0$; les nouveaux axes seront notés $X'\omega X,\ Y'\omega Y$.
   Construire (C_{-1}).
   Calculer les nombres réels A et B tels que :
   $$\frac{1}{4X^2-1} = \frac{A}{2X-1} + \frac{B}{2X+1}.$$
   En déduire, d'une part une primitive de $X \longmapsto \dfrac{1}{4X^2-1}$ et d'autre part, l'aire de l'ensemble E des points $M(X\,;\,Y)$ du plan tels que :
   $$\frac{3}{2} \leqslant X \leqslant X_0, \quad \left(X_0 \geqslant \frac{3}{2}\right) \quad \text{et} \quad g(X) \leqslant Y \leqslant 1.$$
   Cette aire admet-elle une limite quand X tend vers $+\infty$?
3. On considère la suite u définie par la relation de récurrence
   $$U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + 1 \ (n \in \mathbb{N})$$
   et par son premier terme U_0.
   Exprimer U_n en fonction de U_0. (On pourra raisonner par récurrence.) Trouver la limite de la suite $n \longmapsto U_n$ lorsque $n \to +\infty$.

4. **a.** Construire, par rapport au repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, la courbe (C_1). (On vérifiera que (C_1) est portée par une hyperbole équilatère.)

b. L'hyperbole équilatère précédente passe par le point A de coordonnées $x = 1$, $y = 1$.

Écrire une équation de la droite AM_0, M_0 étant le point de l'hyperbole d'abscisse x_0 ($x_0 > 1$). Calculer l'abscisse x, du point où cette droite rencontre l'axe $x'\text{O}x$. Soit M_1 le point d'abscisse x_1 et appartenant à l'hyperbole. Calculer l'abscisse x_2 du point d'intersection de AM_1 avec l'axe $x'\text{O}x$.

Cette opération étant répétée n fois donner une interprétation géométrique de la suite étudiée au 3. (On distinguera les cas où $x_0 \leqslant 2$ et $x_0 > 2$.)

c. On considère la parabole d'équation $y = x^2 - 3$. En s'inspirant de la méthode précédente, déterminer un encadrement de $\sqrt{3}$ à 10^{-4} près.

On prendra le point A de la parabole de coordonnées ($x = 2$; $y = 1$) et pour M_0 on choisira $x_0 = \dfrac{3}{2}$, puis $x_0 = \dfrac{5}{2}$.