∽ Baccalauréat C Aix-Marseille juin 1974 ∾

EXERCICE 1

Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\ ;\ y_0)$ tel que

$$37x_0 + 23y_0 = 1.$$

En utilisant ce couple particulier déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de

$$37x + 23y = 1.$$

EXERCICE 2

Soit P un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
On désigne par s l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe

$$z' = (1 + \text{i})z.$$

1. Préciser la nature géométrique de s et indiquer ses éléments caractéristiques.
2. Soit a un nombre complexe réel et A le point d'affixe a. Déterminer l'ensemble

$$E = \{M \in \text{P} / A,\ M,\ M' \text{ sont alignés}\}.$$

PROBLÈME

On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On désigne par $\mathscr{F}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ des fonctions continues au point 0.
On désigne par $\mathscr{G}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2, à coefficients réels.
On définit dans $\mathscr{E}$ une addition et une multiplication par un nombre réel notées + et $\cdot$ respectivement, par

$$\begin{array}{llll}\forall f \in \mathscr{E}, & \forall g \in \mathscr{E}, & \forall x \in \mathbb{R} & (f+g)(x) = f(x) + g(x)\\ \forall f \in \mathscr{E}, & \forall \lambda \in \mathbb{R}, & \forall x \in \mathbb{R} & (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)\end{array}$$

On rappelle que $\mathscr{E}$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Partie A

1. Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.
   Montrer que $\mathscr{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
2. Dans tout le problème on considère les deux applications

$$\begin{array}{lllll}\sigma : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \text{définie par} & \forall x \in \mathbb{R} & \sigma(x) = 2x\\ \Phi : & \mathscr{E} \to \mathscr{E} & \text{définie par} & \forall f \in \mathscr{E} & \Phi(f) = f + f \circ \sigma\end{array}$$

   a. $\forall x \in \mathbb{R}$ calculer $\Phi(f)(x)$;
   b. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$;
   c. Montrer l'inclusion $\Phi(\mathscr{F}) \subset \mathscr{F}$;
   d. Montrer l'égalité $\Phi(\mathscr{G}) = \mathscr{G}$.

Partie B

Soit $f \in \mathscr{E}$ définie de la manière suivante :
$\forall x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe n appartenant à $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$x = 2^n, \quad f(x) = (-1)^n$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ tel qu'il n'existe aucun n appartenant à $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$x = 2^n, \quad f(x) = 0.$$

1. Déterminer $\Phi(f)$.
2. Est-ce que Φ est injective ?

Partie C

On note $\overline{0}$ la fonction nulle définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \overline{0}(x) = 0$.
Soit $\ker \Phi$ le noyau de Φ : $\ker \Phi = \{f \in \text{E} |\ \Phi(f) = \overline{0}\}$.

1. Établir que $\forall f \in \ker \Phi, \quad f(0) = 0$.
2. Établir par récurrence sur n entier naturel que :

$$\forall f \in \ker \Phi,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = (-1)^n f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

   On désigne par $\Phi_{\mathscr{F}}$ la restriction de Φ à $\mathscr{F}$.

3. Montrer que $\ker \Phi_{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \cap ker \ker \Phi$.
4. Déterminer $\ker \Phi_{\mathscr{F}}$.

Partie D

Soit $g \in \mathscr{E}$ définie de la manière suivante :
$\forall x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star = \mathbb{N} - \{0\}$ vérifiant

$$x = \frac{1}{4^n}, \quad g(x) = \frac{1}{n}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ tel qu'il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant

$$x = \frac{1}{4^n}, \quad g(x) = 0.$$

1. Montrer que $g \in \mathscr{F}$.
2. S'il existe $f \in \mathscr{E}$ telle que $\Phi(f) = g$ établir une relation entre $f\left(\frac{1}{4^{n+1}}\right)$ et $f\left(\frac{1}{4^n}\right)$.
3. Soit la suite numérique de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^\star)$$

   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
   En déduire que $u_n \to +\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

4. Montrer que g n'est l'image par Φ d'aucun élément de $\mathscr{F}$.
   Est-ce que $\Phi(\mathscr{F})$F est surjective ?