Baccalauréat C Aix–Marseille juin 1979

EXERCICE 1 **4 points**

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et f l'application de $\mathbb{C} - \{-\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}.$$

1. Démontrer que f applique bijectivement $\mathbb{C} - \{-\mathrm{i}\}$ sur $\mathbb{C} - \{1\}$.
2. Quelle est l'image par f de l'ensemble P des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive ?

EXERCICE 2 **4 points**

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. x étant un réel strictement positif on considère le point M de $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse x et l'on désigne par m le coefficient directeur de la droite $(\mathrm{O}M)$.
   Construire la tableau de variations de la fonction continue
   $$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & m. \end{array}$$
2. Soient A et B deux points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et b telles que $a < b$. Démontrer que, si $a^b = b^a$, A et B sont alignés avec O et que $a < \mathrm{e}$.
3. Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a,\ b)$ tels que
   $$a < b \quad \text{et} \quad a^b = b^a.$$

PROBLÈME **12 points**

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté, $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ une base de E orthonormé directe, $\mathrm{I_E}$ l'application identité de E et r la rotation vectorielle de E qui transforme $\vec{\imath}$ en $\vec{\jmath}$.
Dans le plan affine euclidien $\mathscr{E}$ associé à E, muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on donne les points A(1 ; 0) et B(−1 ; 0) et les cercles a et b passant par O de centres respectifs A et B.
Dans tout le problème on associe à chaque point P du cercle a le point Q du cercle b tel que les angles $\left(\widehat{\vec{\imath},\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}}\right)$ et $\left(\widehat{\vec{\jmath},\ \overrightarrow{\mathrm{BQ}}}\right)$ soient égaux. On notera M le milieu du segment [PQ].

Partie I

1. Montrer que : $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}}\right)$ et que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ se déduit du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ par l'application linéaire : $\sigma = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{I_E} + r\right)$.
   Former la matrice de σ dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ et reconnaître que σ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une rotation vectorielle.
2. Démontrer que, quel que soit le point P sur le cercle a, le point M s'en déduit par une similitude directe fixe dont on donnera le centre, le rapport et l'angle.
   Étudier l'ensemble des points M associés aux points P du cercle a.

Partie II

Soit θ une détermination de la mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\imath}\,,\ \overrightarrow{\text{AP}}}\right)$.
Calculer en fonction de θ les coordonnées $(x\ ;\ y)$, $\left(x'\ ;\ y'\right)$, $(X\ ;\ Y)$ des points P, Q, M.
Puis calculer X et Y en fonction de x et y. Retrouver les résultats de la question I 2.

Partie III

Étudier l'ensemble S des distances PQ associées aux points P de cercle a. Démontrer que S est un intervalle fermé dont on donnera les bornes.

Partie IV

Étudier l'ensemble T des coefficients directeurs des droites (PQ) associées aux points P du cercle a. Démontrer que T est un intervalle fermé dont on donnera les bornes.

Partie V

Soit K un point fixe de $\mathcal{E}$ et k le nombre de droites (PQ) passant par K.

1. Quel est l'ensemble des nombres k ainsi associés aux points K de E ?
2. Déterminer l'ensemble des points K de E pour lesquels $k = 1$.

N.B. Les parties III, IV et V sont indépendantes les unes des autres.
Les parties III et IV peuvent être étudiées géométriquement ou par le calcul.