# Baccalauréat C groupe 4 [1] juin 1984

**EXERCICE 1** **4 POINTS**

Soit $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace E.

On désigne par :

— $R_1$ la rotation d'axe O$z$ orienté par $\vec{k}$, et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$

— $R_2$ la rotation d'axe O$z$ orienté par $\vec{k}$, et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$

— $T_1$ la translation de vecteur $\left(\dfrac{1}{2}\vec{k}\right)$

— $T_2$ la translation de vecteur $\left(-2\vec{k}\right)$

On considère les vissages : $V_1 = R_1 \circ T_1 = T_1 \circ R_1$ et $V_2 = R_2 \circ T_2 = T_2 \circ R_2$.

1. Étant donné un point $M$ quelconque de E, calculer en fonction des coordonnées $(x~;~y~;~z)$ de M les coordonnées des points suivants :

$$V_1(M), V_2(M), V_1 \circ V_2(M), V_2 \circ V_1(M).$$

2. Caractériser les transformations $V_1 \circ V_2$ et $V_2 \circ V_1$, et expliquer sans calculs les résultats obtenus.

**EXERCICE 2** **4 POINTS**

Dans le plan P muni du repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on définit les trois points :

$$\text{A}(1~;~0) \quad ; \quad \text{B}\left(\dfrac{3}{2}~;~\dfrac{1}{2}\right) \quad ; \quad \text{C}\left(\dfrac{3}{2}~;~-\dfrac{1}{2}\right)$$

et la droite $D$ dont une équation est : $x = 1$.

1. Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{\text{CG}} = \overrightarrow{\text{AB}}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère (A, B, G, C) ?
2. On note $(\Gamma)$ l'ensemble des points $M$ de P, de coordonnées $(x~;~y)$, qui vérifient la relation :

$$-M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = 2(x-1)^2.$$

   **a.** Montrer que B et C appartiennent à $(\Gamma)$.

   **b.** Montrer que $(\Gamma)$ est l'ensemble des points $M$ de P tels que :

$$M\text{G} = \sqrt{2}d(M,~D)$$

   où $d(M,~D)$ désigne la distance de $M$ à la droite $D$.

   **c.** En déduire la nature de $(\Gamma)$ et préciser ses éléments remarquables. Représenter $(\Gamma)$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Aix-Marseille - Nice - Corse - Montpellier - Toulouse

**PROBLÈME** **12 POINTS**

**N.B. : Il n'est pas nécessaire d'avoir traité la partie A pour aborder la suite.**

Soit P un plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ ; les points de P sont repérés, soit par leurs coordonnées $(x\,;\,y)$, soit par leur affixe $x + \mathrm{i}y$.
Le but du problème est l'étude de l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M(t)$, $t \in \mathbb{R}$, du plan P, de coordonnées $(x(t)\,;\,y(t))$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) &=& \mathrm{e}^t \cos t\\ y(t) &=& \mathrm{e}^t \sin t. \end{array}\right.$$

**Partie A**

1. a. Vérifier, pour tout réel $t$, les relations :

$$\cos t - \sin t = \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

et

$$\cos t + \sin t = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

   b. Étudier les variations des fonctions $x : t \longmapsto x(t)$ et $y : t \longmapsto y(t)$ sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

   c. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ la portion de $(\Gamma)$, ensemble des points $M(t)$ lorsque $t$ décrit $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
   (on aura soin, en particulier, des représenter les points $M(0)$, $M(\pi/4)$, $M(\pi/2)$ et les tangentes à $(\Gamma)$ en ces points.)

2. Calculer, pour tout réel $t$ :

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{O}M}\,;\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\mathrm{d}t}}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{O}M}\,;\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\mathrm{d}t}}\right).$$

   En déduire que l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{O}M}\,;\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\mathrm{d}t}}\right)$ est constant et en donner une mesure.

3. On pose, pour tout réel $a$ et $b$, $L_a^b = \displaystyle\int_a^b \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\mathrm{d}t}\right\| \mathrm{d}t$.

   Donner l'expression $L_0^{\frac{\pi}{2}}$ et en calculer une valeur approchée à $10^{-2}$ près.
   Étudier la limite éventuelle de $L_t^0$ lorsque $t$ tend vers $-\infty$.

**Partie B**

1. Montrer que les fonctions $x$ et $y$ sont des solutions sur $\mathbb{R}$ d'une même équation différentielle linéaire et homogène du second ordre à coefficients constants.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$X'' - 2X' + 2X = 0.$$

**Partie C**

1. Pour tout réel $t$, on note $f_t$ l'application de P dans P qui, au point $M$ d'affixe $Z$ fait correspondre le point $M_1$ d'affixe $Z_1$ telle que $Z_1 = z(t)Z$, où $z(t)$ est l'affixe du point $M(t)$ défini dans la partie A.
   **a.** Préciser la nature de $f_t$ et ses éléments remarquables.
   **b.** Montrer que, pour tout $t$ et $t'$ réels, $f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'}$.
   Soit G l'ensemble des applications $f_t,\ t \in \mathbb{R}$. Montrer que (G, $\circ$) est un groupe commutatif des transformations du plan P.
2. **a.** Montrer que, pour tout $t$ et $t_1$ réels, $f_t\left(M\left(t_1\right)\right) = M\left(t + t_1\right)$. En déduire que, pour tout réel $t,\ f_t(\Gamma) = (\Gamma)$.
   **b.** Montrer que, si $M_1 = M\left(t_1\right)$ est un point quelconque de $(\Gamma)$, l'ensemble : $\left\{f_t\left(M_1\right),\ t \in \mathbb{R}\right\}$ est égal à $(\Gamma)$.

**Partie D**

Soit $t$ un réel fixé non nul. On note $A_0$ le point $M(0)$ et on définit les points $A_n(n \in \mathbb{N}^*$ par la relation de récurrence :

$$A_n = f_t\left(A_{n-1}\right) \ \text{ si } \ n \geqslant 1.$$

1. **a.** Calculer en fonction de $t$ la longueur $A_0A_1$.
   **b.** Montrer que la suite $\left(A_{n-1}A_n\right)$ des longueurs $A_{n-1}A_n$ est une suite géométrique.
   **c.** En déduire une expression de :

$$L_n(t) = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n \quad \text{en fonction de } n \text{ et } t.$$

2. On suppose $t < 0$. Montrer l'existence de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} L_n(t)$ et calculer sa valeur $L(t)$.
   Montrer que $\dfrac{\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{t}\cos t + 1}{\left(1 - \mathrm{e}^{t}\right)^2} = 1 + 2\mathrm{e}^{t}\dfrac{1 - \cos t}{\left(1 - \mathrm{e}^{t}\right)^2}$.
   En déduire la limite de $L(t)$ lorsque $t$ tend vers zéro par valeurs négatives. Comparer ce résultat à la limite de $L_t^0$ trouvée au A 3.