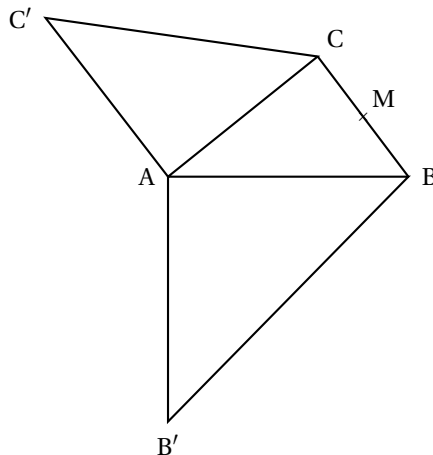


Baccalauréat C Aix-Marseille¹ juin 1986

EXERCICE 1

6 POINTS

Le triangle ABC est quelconque, M est le milieu du segment $[BC]$.
 Les triangles BAB' et $CC'A$ sont rectangles et isocèles directs de sommet A . Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que $B'C' = 2AM$.



1. Méthode géométrique

- a. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2 . Déterminer les images des points A et M par h .
 Trouver une rotation r telle que $r \circ h$ transforme A en B' et M en C' .
- b. En déduire que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que $B'C' = 2AM$.

2. Utilisation des nombres complexes

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine A dans lesquels B et C ont pour affixes respectives b et c .

- a. Calculer les affixes m, b' et c' des points M, B' et C' .
- b. Retrouver alors les résultats de la question 1. b.

EXERCICE 2

4 POINTS

On donne dans le plan deux points fixes F et A . On considère les ellipses E dont un foyer est F et A le sommet de l'axe focal le plus voisin de F .

- a. Quel est l'ensemble des points O centres des ellipses E ?
 - b. Soit O un point de cet ensemble et soit D la perpendiculaire en O à la droite (AF) . Construire (au moyen du compas seulement) les sommets B et B' de l'ellipse E appartenant à D .
- a. Soit B un sommet du petit axe d'une ellipse E ; montrer que B appartient à une parabole P de foyer F dont on déterminera la directrice.
 - b. Déterminer la partie de P qui est l'ensemble des points B .

PROBLÈME

10 POINTS

I.

1. Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- $$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Tracer sa courbe représentative \mathcal{C} dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'y'$.

2. Pour tout x réel on pose $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

- a. Justifier que F est définie sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R} .
Calculer $F'(x)$. En déduire le sens de variation de F .
- b. Montrer que F est impaire.
- c. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

Déduire de cette inégalité que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

3. x étant un réel quelconque, on pose

$$G(x) = F(2x) - F(x).$$

- a. Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R} . Étudier le sens de variation de G sur \mathbb{R} .
- b. Justifier l'affirmation suivante :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}.$$

- c. Déduire de I. 3. a. et I. 3. b. que l'on peut affirmer : pour tout x de \mathbb{R} : $G(x) \leq \ln 2$.
(On écrira $G(x)$ à l'aide d'une seule intégrale).
- d. Déduire de I. 3. a. et I. 3. c. que l'on peut affirmer l'existence d'un réel L , limite quand x tend vers plus l'infini de $G(x)$.
- e. Montrer que G est une fonction impaire.
- f. Déduire de I. 3. d. et I. 3. e. que $G(x)$ tend vers une limite quand x tend vers plus l'infini.
Exprimer cette limite en fonction de L .

II.

On considère la fonction φ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \end{array} \right.$$

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ .
- b. Calculer $\varphi'(x)$. Montrer alors que les fonctions F et φ sont égales.
- c. Déduire de II. 1. b. une nouvelle écriture de $G(x)$ (introduit au I. 3. ci-dessus) et la valeur du réel L de la question I. 3. d.
2. On s'intéresse à la courbe représentative Γ de la fonction F dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- a. Montrer que, pour x strictement positif, on peut écrire :

$$F(x) = \ln 2x + \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2} \right].$$

(On rappelle que, par II. 1. b. ci-dessus, $F(x) = \varphi(x)$.)

- b. Étudier les branches infinies de Γ . Reconnaître d'éventuelles asymptotes à Γ .
- c. Étudier la position de Γ par rapport à sa tangente à l'origine.
(On pourra étudier la variation de $h : x \mapsto F(x) - x$.)
- d. Tracer Γ .
3. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire du domaine plan limité par Γ , l'axe x' , les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

III.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & F(u_n). \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que tous les termes de (u_n) sont strictement positifs.
2. Calculer, à 10^{-4} près, les termes u_1, u_2, u_3, u_4 de la suite.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge. Quelle est sa limite ?