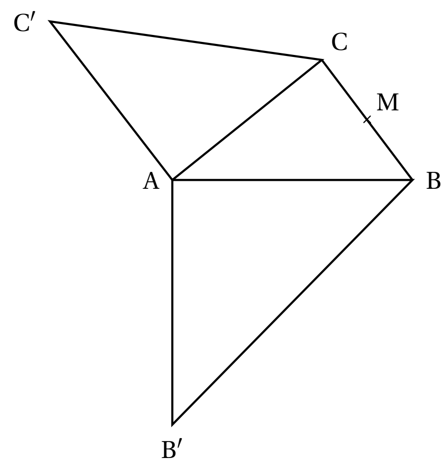
Baccalauréat C Aix-Marseille [1] juin 1986

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Le triangle ABC est quelconque, M est le milieu du segment [BC].
Les triangles BAB$'$ et CC$'$A sont rectangles et isocèles directs de sommet A. Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AM) et (B$'$C$'$) sont perpendiculaires et que B$'$C$'$ = 2 AM.



1. **Méthode géométrique**
   - **a.** Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2. Déterminer les images des points A et M par h.

     Trouver une rotation r telle que $r \circ h$ transforme A en B$'$ et M en C$'$.
   - **b.** En déduire que les droites (AM) et (B$'$C$'$) sont perpendiculaires et que B$'$C$'$ = 2AM.
2. **Utilisation des nombres complexes**

   Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine A dans lesquels B et C ont pour affixes respectives b et c.
   - **a.** Calculer les affixes m, b' et c' des points M, B$'$ et C$'$.
   - **b.** Retrouver alors les résultats de la question 1. b.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On donne dans le plan deux points fixes F et A. On considère les ellipses E dont un foyer est F et A le sommet de l'axe focal le plus voisin de F.

1. **a.** Quel est l'ensemble des points O centres des ellipses E ?
   - **b.** Soit O un point de cet ensemble et soit D la perpendiculaire en O à la droite (AF). Construire (au moyen du compas seulement) les sommets B et B$'$ de l'ellipse E appartenant à D.
2. **a.** Soit B un sommet du petit axe d'une ellipse E ; montrer que B appartient à une parabole P de foyer F dont un déterminera la directrice.
   - **b.** Déterminer la partie de P qui est l'ensemble des points B.

1. Nice - Corse - Montpellier - Toulouse

PROBLÈME **10 POINTS**

I.

1. Étudier la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$.

   Tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'x,~y'y$.

2. Pour tout x réel on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\text{d}t$.

   a. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Calculer $F'(x)$. En déduire le sens de variation de F.

   b. Montrer que F est impaire.

   c. Montrer que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\text{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\text{d}t.$$

   Déduire de cette inégalité que F(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

3. x étant un réel quelconque, on pose

   $$G(x) = F(2x) - F(x).$$

   a. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier le sens de variation de G sur $\mathbb{R}$.

   b. Justifier l'affirmation suivante :

   $$\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}_+^* \ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{1}{x}.$$

   c. Déduire de I. 3. a. et I. 3. b. que l'on peut affirmer : pour tout x de R : $G(x) \leqslant \ln 2$.
   (On écrira $G(x)$ à l'aide d'une seule intégrale).

   d. Déduire de I. 3. a. et I. 3. c. que l'on peut affirmer l'existence d'un réel L, limite quand x tend vers plus l'infini de $G(x)$.

   e. Montrer que G est une fonction impaire.

   f. Déduire de I. 3. d. et I. 3. e. que $G(x)$ tend vers une limite quand x tend vers plus l'infini. Exprimer cette limite en fonction de L.

II.

On considère la fonction φ :

$$\left\{\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \end{array}\right.$$

1. **a.** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ.

   b. Calculer $\varphi'(x)$. Montrer alors que les fonctions F et φ sont égales.

   c. Déduire de II. 1. b. une nouvelle écriture de $G(x)$ (introduit au I. 3. ci-dessus) et la valeur du réel L de la question I. 3. d.

2. On s'intéresse à la courbe représentative Γ de la fonction F dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

a. Montrer que, pour x strictement positif, on peut écrire :

$$F(x) = \ln 2x + \ln\left[\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2}\right].$$

(On rappelle que, par II. 1. b. ci-dessus, $F(x) = \varphi(x)$.)

b. Étudier les branches infinies de Γ. Reconnaître d'éventuelles asymptotes à Γ.

c. Étudier la position de Γ par rapport à sa tangente à l'origine.
(On pourra étudier la variation de $h : x \longmapsto F(x) - x$).

d. Tracer Γ.

3. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire du domaine plan limité par Γ, l'axe $x'x$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

III.

Soit (u_n) la suite définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & F(u_n)\,. \end{array}\right.$

1. Montrer par récurrence que tous les termes de (u_n) son strictement positifs.

2. Calculer, à 10^{-4} près, les termes u_1, u_2, u_3, u_4 de la suite.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge. Quelle est sa limite ?