# Baccalauréat C Aix–Marseille[1] septembre 1972

**EXERCICE 1** **4 POINTS**

1. Démontrer que, pour tout nombre réel $x$, on a

$$-1 < \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} < 1$$

Étudier la fonction numérique $f$, qui est une application, de $\mathbb{R}$ dans $]-1\ ;\ +1[$, définie par

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

Construire sa courbe dans un repère orthonormé.

2. Démontrer que $f$ est une bijection ; pour $x$ donné dans $]-1\ ;\ +1[$, calculer $f^{-1}(x)$.

**EXERCICE 2** **4 POINTS**

1. $u$ désigne un nombre complexe différent de $-1$, de module 1 et d'argument $\theta$.

Calculer le module et l'argument du nombre complexe $\dfrac{1-u}{1+u}$. En déduire le module et l'argument du nombre complexe $z$ tel que

$$\frac{2+\mathrm{i}z}{2-\mathrm{i}z} = u.$$

2. Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation

$$(2+\mathrm{i}z)^5 = (2-\mathrm{i}z)^5.$$

**PROBLÈME** **4 POINTS**

**Partie A**

Soit (E) un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{k}\right)$ une base de (E) dans laquelle seront définies les coordonnées de tous les vecteurs de (E). On considère l'application $f$ de (E) dans lui-même qui, à $\overrightarrow{V}(x\ ;\ y\ ;\ z)$, fait correspondre $\overrightarrow{V'}\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' &=& x,\\ y' &=& x+y,\\ z' &=& y+z. \end{array}\right.$$

1. Démontrer que $f$ est une application linéaire bijective de (E) sur lui-même. Quel est l'ensemble des vecteurs de (E) invariants par $f$ ?

2. Soit $\overrightarrow{U}\left(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\right)$ un vecteur quelconque de (E) et $\left(\overrightarrow{V_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dans (E) telle que

$$\left\{\begin{array}{l c l} \overrightarrow{V_0} &=& \overrightarrow{U} \text{ et}\\ \overrightarrow{V_n} &=& f\left(\overrightarrow{V_{n-1}}\right),\ \forall n \geqslant 1. \end{array}\right.$$

1. Montpellier, Nice

démontrer que, pour tout entier naturel $n$, les coordonnées $\left(x_n\ ;\ y_n\ ;\ z_n\right)$ de $\overrightarrow{V_n}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont

$$\left\{\begin{array}{l c l} x_n & = & x_0,\\ y_n & = & nx_0+y_0,\\ z_n & = & \dfrac{n(n-1)}{2}x_0+ny_0+z_0\end{array}\right.$$

**Partie B**

Soit $(\mathcal{E})$ un espace affine associé a (E) et $\mathcal{R} = \left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ un repère cartésien de $(\mathcal{E})$. Pour tout entier naturel $n$, on désigne par $M_n$ le point de $(\mathcal{E})$ dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont celles de $\overrightarrow{V_n}$ dans $\mathcal{B}$. On suppose que $M_0$ est fixé.

1. **a.** Lorsque $x_0 = y_0 = 0$, comment les points $M_n$ sont-ils disposés ?

   **b.** Même question lorsque $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$.

   **c.** Lorsque $x_0 \neq 0$, démontrer que tous les points $M_n$ sont situés dans un même plan (P) et appartiennent à une parabole $(\Gamma)$, dont on formera l'équation dans le repère cartésien $\left(M_0,\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

2. On suppose que $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ et que le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé.

   **a.** Que devient l'équation de $(\Gamma)$ ?

   Construire dans le plan (P) la parabole $(\Gamma)$ et marquer les points $M_1$, $M_2$ et $M_3$.

   **b.** Démontrer que les milieux des segments $[M_nM_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$, appartiennent à un une même parabole, $(\Gamma')$, et que $(\Gamma')$ est tangente à ces différents segments.