Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Aix-Marseille septembre 1975 ∾

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel. Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division par 7 de 3^n.
En déduire le reste de la division par 7 de 3^{123}.
Déterminer le chiffre x des unités pour que $3^{123} + \overline{197x}$ soit divisible par 7.
($\overline{197x}$ est l'écriture dans le système décimal d'un nombre de 4 chiffres).

EXERCICE 2

Log désigne la fonction « logarithme népérien ».

1. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, définie par

$$f(x) = x^2 + 1 - \text{Log}\, x.$$

   Déterminer le domaine maximum de définition de f.
   Calculer $f'(x)$. Étudier les variations de f (on ne demande pas d'en représenter le graphe).
2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x, définie par

$$g(x) = x - 1 + \frac{\text{Log}\, x}{x}.$$

   Déterminer le domaine maximum de définition de g.
   Étudier les variations de g. Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.
   Calculer dans ce repère l'aire de l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\,;\ y)$ vérifient

$$1 \leqslant x \leqslant \text{e}, \quad x - 1 \leqslant y \leqslant g(x).$$

PROBLÈME

Soit $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ une base d'un espace vectoriel X (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$). On donne dans X deux vecteurs linéairement indépendants $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{v} = a'\overrightarrow{\imath} + b'\overrightarrow{\jmath}$.
Soit Δ, la droite vectorielle de base $\left\{\overrightarrow{u}\right\}$ et Δ' la droite vectorielle de base $\left\{\overrightarrow{v}\right\}$

Partie A

1. Montrer que la matrice dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ de la symétrie vectorielle S par rapport à Δ, et de direction Δ', est de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}$.
   Calculer α, β, γ en fonction de a, b, a', b' et vérifier que $\alpha^2 + \beta\gamma = 1$.
2. Montrer que toute application linéaire de X dans lui-même dont la matrice dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est la forme $\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}$ vérifiant $\alpha^2 + \beta\gamma = 1$ est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments géométriques.

3. Soit P un plan affine associé à X, dont $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$est un repère. On définit une application affine $s~:~P \to P$ associant au point de coordonnées $(x~;~y)$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ le point de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ dans ce même repère de sorte que :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x' &=& 3x+4y+m\\ y' &=& -2x-3y+m'\end{array}\right.$$

Déterminer m' en fonction de m pour que s soit une symétrie dont on déterminera l'axe et la direction.

Partie B

Dans cette partie (indépendante de la précédente) on suppose X euclidien, $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ orthonormée.
On posera $\left\|\vec{v}\right\| = r$, $\left\|\vec{v'}\right\| = r'$, $\cos\left(\vec{v},~\vec{v'}\right) = z$.

1. Soit φ l'endomorphisme de X dont la matrice dans la base $\left(\vec{v},~\vec{v'}\right)$ est

$$\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}$$

Déterminer les couples $\left(\vec{v}~;~\vec{v'}\right)$ tels que $\left\|\varphi\left(\vec{v}\right)\right\| = \left\|\vec{v}\right\|$ et $\left\|\varphi\left(\vec{v'}\right)\right\| = \left\|\vec{v'}\right\|$.
Montrer que ce problème admet une infinité de solutions.
En choisissant $\vec{v}$ arbitrairement on trouve deux vecteurs $\vec{v'_1}$ et $\vec{v'_2}$ tels que $\left(\vec{v}~;~\vec{v'_1}\right)$ et $\left(\vec{v}~;~\vec{v'_2}\right)$ soient solutions du problème.
Obtenir $\vec{v'_1}$ et $\vec{v'_2}$ à partir de $\vec{v}$ par composition d'une rotation vectorielle et d'une homothétie vectorielle.

2. Calculer les coordonnés $\left(a'_1~;~b'_1\right)$ de $\vec{v'_1}$ et $\left(a'_2~;~b'_2\right)$ de $\vec{v'_2}$ en fonction de a et b, coordonnées du vecteur $\vec{v}$.

3. Montrer que si la matrice de φ est $\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}$ dans l'une ou l'autre des bases $\left(\vec{v}~;~\vec{v'_1}\right)$, $\left(\vec{v}~;~\vec{v'_2}\right)$, φ est une rotation vectorielle ; on comparera les deux rotations vectorielles ainsi identifiées.

4. Montrer que si $\psi : X \to X$ est une rotation vectorielle, sa matrice dans toute base $\left(\vec{e_1},~\vec{e_2}\right)$ est de la forme $\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\ \beta&-\alpha\end{pmatrix}$ avec $|\alpha+\delta| \leqslant 2$ et $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, et que, θ étant une détermination de la mesure de l'angle de la rotation, $\cos\theta = \dfrac{\alpha+\delta}{2}$.

On pourra rechercher la matrice ψ dans la base $\left(\dfrac{\vec{e_1}}{\left\|\vec{e_1}\right\|},~\dfrac{\vec{e_2}}{\left\|\vec{e_2}\right\|}\right)$ puis dans une base orthonormée $\left(\dfrac{\vec{e_1}}{\left\|\vec{e_1}\right\|},~\vec{e_3}\right)$.