Baccalauréat C Aix-en-Provence septembre 1977

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Déterminer tous les couples $(u,\ v)$ d'entiers relatifs vérifiant

$$5u - 3v = 0.$$

2. En déduire les couples $(p,\ q)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation

$$5p - 3q = 1$$

3. Résoudre le système

$$x \in \mathbb{Z} \quad \left\{ \begin{array}{lcll} x & \equiv & 1 & \pmod 5 \\ x & \equiv & 2 & \pmod 3 \end{array} \right.$$

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit P un plan affine euclidien et $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de P.
Soit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$f~:~x \longmapsto \frac{1}{2}\text{Log}\,\frac{1+x}{1-x}.$$

1. Montrer que f est une fonction impaire. Étudier les variations de f et montrer que f définit une bijection de $]-1~;~+1[$ sur $\mathbb{R}$.
   Tracer la courbe représentative de f dans P.
2. Soit g la fonction réciproque de f ; quelles propriétés (ensemble de définition, sens de variation, continuité) de la fonction g peut-on déduire de l'étude de la fonction f.
   Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g' = 1 - g^2$
3. Calculer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,\text{d}t \qquad \int_0^{\text{Log}\sqrt{3}} \left(1 - g^2(t)\right)\,\text{d}t.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Soit P le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.
On considère l'application

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \text{P} \\ t & \longmapsto & m \end{array}$$

telle que si x et y désignent les coordonnées de m dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$,

$$x = 2\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad \text{et} \quad y = t - \frac{1}{t}.$$

1. Soit H l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.
   Montrer que $F\left(\mathbb{R}^\star\right) = H$ (on pourra poser $X = \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2}$).
   Soient t et t' deux réels non nuls tels que $F(t) = m$ et $F(t') = m$. Calculer en fonction de $t' - t$ et de tt' les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{F(t)F(t')}$.
   En déduire que F est bijective.
   On désigne par H_1 l'intersection de H avec le demi-plan d'équation $x > 0$; montrer que $F\left(\mathbb{R}_+^\star\right) = H_1$,où $\mathbb{R}_+^\star = \mathbb{R}_+ - \{0\}$.
2. Déterminer les deux premières dérivées $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$ de l'application F ; montrer que $\overrightarrow{\Gamma}$ a une direction fixe.
3. Tracer H_1 (on prendra $\left\|\overrightarrow{\imath}\right\| = \left\|\overrightarrow{\jmath}\right\| = 2$ cm).
   Placer les points $\mathrm{A} = F(1)$, $m_2 = F(2)$, $m_3 = F(3)$ et $\mathrm{B} = F(-1)$.

Partie B

Soient $m(x\,;\,y)$ et $m'\left(x'\,;\,y'\right)$ deux points de H ; on considère le point $M(X\,;\,Y)$ défini par ,

$$X = \frac{xx'}{4} + y'y \quad \text{et} \quad Y = \frac{xy' + x'y}{4}$$

1. Calculer $\left(\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4}\right)\left(\dfrac{x'^2}{16} - \dfrac{y'^2}{4}\right)$; montrer que M appartient à H.
   On note $M = m\star$. La loi $\star$ est donc une loi de composition interne pour H.
   Montrer que :

$$\forall (t\,;\,t') \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^\star, F(t) \star F(t') = F(tt').$$

   En déduire que F est un isomorphisme de $\left(\mathbb{R}^\star,\ \times\right)$ sur $(H,\ \star)$.
2. En déduire que $(H,\ \star)$ est un groupe commutatif.
   Préciser l'élément neutre. Que représente $\overline{m} = F\left(\dfrac{1}{t}\right)$.
3. **a.** On suppose $m' \neq m$, $m' \neq \overline{m}$, et $M = m \star m'$. En utilisant le A 1. montrer que la droite (mm') est parallèle à la droite $(\mathrm{A}M)$.
   b. On suppose $m' = \overline{m}$; Montrer que la droite $(m\overline{m})$ est parallèle à la tangente en A à H.
   c. On suppose que $M = m \star m$, $m \neq \mathrm{A}$ et $m \neq \mathrm{B}$; Montrer que la droite $(\mathrm{A}M)$ est parallèle à la tangente en m à H.
   d. On reprend les notations du A 3. De plus, on pose

$$m_4 = F(4), \quad \overline{m_3} = F\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{et} \ \ m_{4/3} = F\left(\frac{4}{3}\right).$$

   Montrer que $m_4 = m2 \star m_2$, et $m_{4/3} = m_4 \star m_3$. Construire géométriquement m_4, puis m_3, puis $\overline{m_{4/3}}$.
   e. Soient trois points m, n, p de H tels que $m \star n = q$ et $n \star p = r$.
   Montrer que, si $p \neq q$ et $m \neq r$, les droites (mr) et (pq) sont parallèles,
   [Il est conseillé de calculer $(m \star n) \star p$ et $m \star (n \star p)$].

Partie C

Soit C $\in H$ et soit l'application Φ : $\begin{array}{ccc} H & \to & H \\ m & \longmapsto & \overline{m} \star \mathrm{C} \end{array}$

On suppose que $m = F(t)$ et C $= F(e)$, e réel différent de 1.

1. Démontrer que m est invariant par Φ si et seulement si $t^2 = c$. En déduire que si C appartient à H_1, Φ admet deux points invariants U et V. (on appellera U celui de ces deux points qui est situé sur H_1). Montrer qu'alors H admet deux tangentes parallèles à la droite (AC) et que pour m distinct de U et V ,la droite $(m\Phi(m)$ est parallèle à (AC).
2. **Application :** soit C $= F(4) = m_4$.
   Déterminer U, V et $\Phi\,(m_3)$. Vérifier que la tangente en U à H est parallèle à (AC).