Durée : 4 heures

Baccalauréat C septembre 1981 Aix-en-Provence

EXERCICE 1

Soit E un espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Soit f l'application de E dans E qui, au point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, associe le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{4}{3}\\ y' = \quad \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}y + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{4}{3}\\ z' = \quad \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}z + \dfrac{10}{3}\end{array}\right.$$

1. Existe-t-il des points invariants par f ?
2. Démontrer que l'endomorphisme <p associé à f est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle que l'on déterminera.
3. En déduire que f est un vissage dont on déterminera les éléments (axe, vecteur, angle).

EXERCICE 2

La fonction f est définie sur $]0\ ;\ \pi[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

1. Étudier les variations de f et représenter la courbe d'équation $y = f(x)$ dans un repère orthonormé.
2. **a.** Montrer que la restriction g de f à $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$ possède une application réciproque g^{-1}. On précisera l'ensemble de définition de g^{-1}.

   b. Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable sur un ensemble que l'on précisera. Calculer la fonction dérivée.
3. Calculer, en se servant des résultats précédents, l'intégrale définie

$$J = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t.$$

PROBLÈME

La notation Log désigne le logarithme népérien, e est la base du logarithme népérien, et, si n est un entier naturel et x un réel strictement positif, $\text{Log}^n x$ est la puissance d'exposant n du logarithme népérien de x.
On admettra que, pour tout entier n,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x\,\text{Log}^n x\right) = 0.$$

Partie A

1. Pour tout entier naturel n, montrer qu'on peut définir une application I_n de $]0~;~+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$I_n(x) = \int_x^{\mathrm{e}} \mathrm{Log}^n t \,\mathrm{d}t.$$

Calculer $I_0(x)$.
Démontrer que, pour tout n supérieur ou égal à 1,

$$I_n(x) = \mathrm{e} - x\mathrm{Log}^n x - nI_{n-1}(x).$$

En déduire $I_1(x)$ et $I_2(x)$.

2. On pose, pour tout entier naturel n,

$$J_n = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} I_n(x)$$

si cette limite existe.
Montrer que J_0 existe et la calculer.
Montrer par récurrence que J_n existe pour tout n. Déterminer une relation liant J_n et J_{n-1} pour tout n entier naturel non nul.
Calculer J_1, J_2, J_3, J_4.
Application : $(a~;~b)$ étant un couple de nombres réels, calculer

$$S(a~;~b) = \frac{1}{\mathrm{e}} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[\int_x^{\mathrm{e}} \left(a\mathrm{Log}^2 t + b\mathrm{Log}\, t\right)^2 \mathrm{d}t\right].$$

Vérifier que, pour tout $(a~;~b)$ dans $\mathbb{R}^2$,

$$S(a~;~b) = S\left(\frac{2a-b}{\sqrt{5}}~;~\frac{9a-2b}{\sqrt{5}}\right).$$

Partie B

1. On désigne par E l'ensemble des applications de $]0~;~+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que E, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel.
Pour tout couple $(a~;~b)$ de nombres réels, on désigne par $f_{a~;~b}$ l'élément de E tel que

$$f_{a~;~b}(x) = a\mathrm{Log}^2 x + b\mathrm{Log}\, x.$$

Soit F l'ensemble des applications $f_{a~;~b}$ pour $(a~;~b)$ dans $\mathbb{R}^2$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
Démontrer que $B = \left(f_{1~;~O},~f_{0~;~1}\right)$ est une base de F. Calculer les coordonnées de $f_{a~;~b}$ dans B.

2. Étudier les applications $f_{1~;~0}$ et $f_{0~;~1}$ et en faire la représentation graphique dans un même plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Cette représentation met en évidence un domaine plan fermé délimité par un arc de chacune des courbes représentatives de $f_{1~;~O}$ et $f_{0~;~1}$ et inclus dans la bande $1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}$.
Calculer l'aire de ce domaine.

Partie C

Soit g l'application de F dans F telle que

$$g\left(f_{a\,;\,b}\right) = f_{\frac{2a-b}{\sqrt{5}}\,;\,\frac{9a-2b}{\sqrt{5}}}.$$

Montrer que g est linéaire et déterminer sa matrice A dans la base B. Calculer A^2, A^3, A^4 ?
En déduire que g est bijective et donner la matrice de g^{-1} dans la base B.

Partie D

Montrer qu'on définit une application Φ de $F \times F$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\phi\left(f_{a\,;\,b},\ f_{a'\,;\,b'}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left[\int_x^{\mathrm{e}} f_{a\,;\,b}(x) \cdot f_{a'\,;\,b'}(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

Démontrer que Φ est une forme bilinéaire symétrique sur $F \times F$.
Montrer que $\Phi\left(f_{a,\,b},\ f_{a,\,b}\right) = S(a, b)$ et en déduire que Φ est un produit scalaire sur F.
On munit F de ce produit scalaire. Calculer $\left\| f_0 \right\|$.
Déterminer $a > 0$ et b de sorte que $\mathrm{B}' = \left(f_{a,\,b},\ f_{0,\,1}\right)$ soit une base orthonormée de F.
Caractériser l'endomorphisme g de l'espace vectoriel euclidien F.