Baccalauréat C Aix-Marseille septembre 1985 [1]

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Soit $\mathbb{C}_1$ l'ensemble $\mathbb{C} - \{-\text{i},\ \text{i}\}$ et f l'application telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}_1 \quad f(z) = \frac{z}{z^2+1}.$$

1. Résoudre l'équation : $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
2. **a.** Montrer que
   $\forall \left(z,\ z'\right) \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1, \quad f(z) = f(z') \iff z = z'$ ou $zz' = 1$.

   b. Soit $\left(z,\ z'\right) \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1$ tel que

   $$|z| < 1 \quad \text{et} \quad \left|z'\right| < 1;$$

   montrer que

   $$f(z) = f\left(z'\right) \Rightarrow z = z'.$$
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z \in \mathbb{C}_1$ et $f(z)$ soit réel.
4. Dans cette question, $z = \text{e}^{\text{i}\theta},\ \theta \in [-\pi\ ;\ \pi[- \left\{-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

   a. Montrer que $f(z)$ est réel, et le calculer en fonction de $\cos\theta$.

   b. Soit u la suite réelle telle que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + f(z) + (f(z))^2 + \cdots + (f(z))^n.$$

   Pour quelles valeurs de θ cette suite converge-t-elle ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit dans le plan P, orienté, un triangle OAB tel que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$ ait pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

1. Soit S une similitude directe transformant A en B, et la droite (OA) en la droite (OB). Montrer que S a un centre Ω qui appartient au cercle $\mathscr{C}$, circonscrit au triangle OAB.
2. Réciproquement, montrer que tout point Ω' de $\mathscr{C}$, distinct de A et de B, est le centre d'une similitude directe transformant A en B et (OA) en (OB).
3. Donner une construction géométrique simple des centres des rotations transformant A en B et (OA) en (OB).

PROBLÈME **10 POINTS**

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 4 cm).
g est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

A.

1. Aix-Marseille - Nice - Corse - Montpellier - Toulouse

1. Étudier les variations de g ; tracer $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et préciser la droite asymptote.
2. Dans le problème tan désigne la bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[,\quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

   Exprimer simplement $(g \circ tan)(x)$. Retrouver alors les extremums de g et préciser les antécédents correspondants.
3. Δ_α est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & \leqslant & x & \leqslant & \alpha \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & g(x) \end{array}\right. \qquad \alpha \in]1\ ;\ +\infty[,\ \text{réel donné}$$

   Calculer A_α, l'aire de Δ_α. Déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} A_\alpha$, puis $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{A_\alpha}{\alpha}$.

B.

Soit u la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} = g\left(u_n\right)$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   En déduire que u est strictement décroissante.
2. Montrer que u converge, puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

C.

Soit G et H les applications de $[1\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in [1\ ;\ +\infty[,\ G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } H(x) = \int_1^x G(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Exprimer $G(x)$. Sans chercher à calculer $H(x)$, étudier les variations de H sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. On pose, pour $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $L(x) = \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$. (La notation ln désigne le logarithme népérien).
   a. Montrer que :

$$\forall x \in [1\ ;\ +\infty[,\ H(x) - L(x) = \frac{1}{2}\int_1^x \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

   b. Justifier

$$\forall X \in \mathbb{R}_+ \quad \ln(1+x) \leqslant X.$$

   En déduire

$$\forall x \in [1\ ;\ +\infty[,\ H(x) - L(x) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}.$$

   c. Montrer que $x \longmapsto H(x) - L(x)$ admet une limite finie, ℓ, lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Soit $\tan^{-1}$ la fonction réciproque de tan définie en 2.
   a. Justifier la dérivabilité de $\tan^{-1}$ en tout point et montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \left(\tan^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

   b. Calculer $H(x) - L(x)$ au moyen d'une intégration par parties.
   c. Donner la valeur de ℓ $\left(\text{on admet : } \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}\right)$.