∽ Baccalauréat Aix–Marseille série mathématiques juin 1952 ∾

I. - 1er sujet.

Rotation autour d'un axe vertical d'un plan donné par ses traces.
Application : Les traces d'un plan font entre elles un angle de 120°dont la ligne de terre est la bissectrice.
Quel doit être l'angle de la rotation pour que les nouvelles traces forment encore un angle de 120° dont la ligne de terre est la bissectrice ? Faire l'épure.

I. - 2e sujet

Variation et représentation graphique de la fonction

$$y = \frac{2x^2 + 2x + 2}{x - 1}$$

I. - 3e sujet.

Construction des cercles passant par deux points donnés et tangents à un cercle donné d'un plan.

II.

On considère les coniques (C) ayant un foyer F donné et tangentes à une droite Δ en un point fixe A.

1. Lieu du second foyer F$'$ de (C).
   Discuter suivant la position de Δ sur son lieu la nature de (C).
   Y a-t-il parmi ces coniques une parabole ?
   Prouver que les cercles directeurs (F$'$) de centres F$'$ forment un faisceau de cercles tangents.
2. Dans cette question, on associe deux coniques (C) ayant la même excentricité e ; prouver que les axes focaux FF'_1, FF'_2 relatifs à ces deux coniques (C_1) et (C_2) restent également inclinés sur deux droites fixes, lorsque e varie ; les cercles directeurs (F'_1) et (F'_2) se correspondent dans une inversion fixe (I) que l'on déterminera.
   Situer l'inverse du point F dans l'inversion envisagée.
   Étudier les points communs à deux coniques (C_1) et (C_2) ; en dehors du point A, si (C_1) et (C_2) sont deux ellipses, elles n'ont aucun point commun ; deux hyperboles ont toujours deux points communs.
   Sur quelle ligne se déplacent ces points lorsque e varie ?
3. Revenant aux coniques (C) du **1.**, prouver que les directrices relatives à F passent par un point fixe K; la directrice associée à F$'$ est homothétique de l'axe non focal dans une homothétie de centre K.
   En déduire la courbe à laquelle cette directrice reste tangente.
4. On considère une sphère fixe (O) et un plan P tangent en F à la sphère (O).
   Un cône de sommet S circonscrit à la sphère coupe le plan P suivant une conique (C) de foyer F.
   Lieu du point S pour que (C) soit tangente en A à une droite Δ du plan P.
   Retrouver, à partir de cette nouvelle définition de (C), le lieu de F$'$ et le résultat relatif à la directrice associée à F.

Baccalauréat Aix–Marseille série mathématiques et technique juin 1952

I. - 1er sujet.

Etablir, à partir de la définition de la dérivée, les formules qui donnent :

1. la dérivée de $\cos x$;
2. la dérivée de $\cos(px+q)$, p et q étant deux constantes.

I. - 2e sujet.

Résoudre par deux méthodes différentes l'équation

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=\frac{7}{4}.$$

I. - 3e sujet.

Définir l'inversion et établir la conservation des angles.

II.

On donne un cercle de centre O, de rayon R, tangent en I à une droite (Δ) et un diamètre PQ de ce cercle.

1. Montrer que l'on peut déterminer le foyer et la directrice d'une parabole (π) tangente en P et Q aux droites IP et IQ.
2. Si le diamètre PQ varie, on obtient une famille de paraboles (π) :
   a. Quel est le lieu des foyers de ces paraboles ?
   b. Montrer que toutes les paraboles (π) passent par un point fixe A ;
   c. Construire les paraboles (π) qui passent par un point donné M différent de A.
   Montrer que, pour certaines positions de M le problème n'admet qu'une seule solution.
   Lieu de M répondant à cette condition.
   Indiquer, suivant la position de M dans le plan, le nombre de solutions.
   d. Construire les paraboles (π) tangentes à une droite donnée (D).
   Montrer que, pour certaines positions de la droite (D), le problème n'admet qu'une solution ; dans ce cas, la droite (D) passe par un point fixe ou est tangente à une courbe que l'on déterminera.
   Indiquer, suivant la position de (D), le nombre de paraboles (π) tangentes à (D).
3. On considère les deux paraboles (π_1) et (π_2) qui correspondent à deux positions rectangulaires de PQ : P_1Q_1 et P_2Q_2.
   a. Montrer que ces paraboles se coupent en A sous un angle droit.
   b. Construire le deuxième point B commun à ces deux paraboles.
   c. Quel est le lieu de B lorsque P_1Q_1 et P_2Q_2 tournent autour de O en restant perpendiculaires ?