

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C 1985 Aix-Marseille ¹ ∞

EXERCICE 1

5 points

Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties

$$I_k = \int_0^k x^2 e^{-x} dx.$$

Étudier la limite de I_k quand k tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

5 points

P est le plan orienté. On appelle « triangle équilatéral direct » tout triplet (A, B, C) de points de P vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{le triangle ABC est équilatéral} \\ \frac{\pi}{3} \text{ est une mesure en radians de l'angle } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \end{array} \right.$$

On se donne un cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon R et une droite (D) ne coupant pas (\mathcal{C}).

1. Soit A un point de (D). On note (E_A) l'ensemble des points M de P vérifiant la propriété :
« il existe un point N de (\mathcal{C}) tel que le triplet (A, M, N) soit un triangle équilatéral direct ».
Montrer que (E_A) est un cercle dont on déterminera le centre Ω_A et le rayon R_A . Construire (E_A).
2. Quel est l'ensemble des points A lorsque A décrit (D) ? Construire cet ensemble.

PROBLÈME

10 points

A.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$X'' + 2X' + 2X = 0 \quad (1)$$

où X représente une fonction numérique de la variable réelle t définie sur \mathbb{R} .

2. Déterminer Les solutions f et g de (1) vérifiant :

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = -1$$

$$g(0) = 0 \text{ et } g'(0) = 1$$

B. Soit f la fonction numérique de la variable réelle t définie par :

$$f(t) = e^{-t} \cos t.$$

1. Montrer que, pour tout réel t : $-e^{2t} \leq f(t) \leq e^{2t}$. Qu'en déduit-on quant à la position relative des courbes représentatives $\mathcal{C}, \Gamma, \Gamma'$ des fonctions

$$t \mapsto f(t) \quad ; \quad t \mapsto e^{-t} \quad ; \quad t \mapsto -e^{-t}?$$

Étudier la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} ; vérifier que, pour tout réel t :

$$f'(t) = -\sqrt{2}e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

3. Déterminer les points communs à \mathcal{C} et Γ , à \mathcal{C} et Γ' . Montrer qu'en ses points les tangentes aux deux courbes sont confondues.
4. Tracer les arcs des courbes \mathcal{C} , Γ , Γ' correspondant à $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 2 cm en abscisses; 16 cm en ordonnées).
5. Soit g la fonction numérique de la variable réelle t définie par

$$g(t) = e^{-t} \sin t.$$

Calculer $g(t)$ en fonction de $f\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Déduire le tableau de variations de g sur $[0; 2\pi]$ du tableau de variations de f obtenu en B. 2.

C. Le plan P est rapporté à un nouveau repère (O, \vec{I}, \vec{J}) , orthonormé (unité : 16 cm).

À tout réel t on associe le point $M(t)$ d'affixe $z(t) = f(t) + ig(t)$, et on note S l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit \mathbb{R} .

L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de S .

1. Pour tout entier naturel n , on note A_n le point $M\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.
- Placer A_0, A_1, A_2, A_3 et la tangente en A_0 à S .
 - Tracer l'arc $\widehat{A_0A_3}$ de S , correspondant aux réels $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
Préciser les points de cet arc où les tangentes à S sont parallèles aux axes.
2.
 - Déterminer, en fonction de t , le module et un argument de $z(t)$.
 - Prouver qu'il existe une similitude directe de centre O , dont on précisera les éléments, telle que, pour tout réel t : $M\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ soit l'image de $M(t)$.
 - Quelle est l'image de l'arc de courbe $\widehat{A_nA_{n+1}}$ par cette similitude?
3. On admet que tout arc $\widehat{A_nA_{n+1}}$ a une longueur ℓ_n , et qu'une similitude de rapport k transforme un arc de longueur ℓ en un arc de longueur $k\ell$.
- Calculer ℓ_n en fonction de ℓ_0 et de n ; en déduire la longueur L_n de $\widehat{A_0A_n}$.
 - Étudier la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.
4. On donne $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dx$.
- Calculer I_0 ; en déduire la valeur de la limite obtenue en C. 3. b.