Baccalauréat C Aix–Marseille septembre 1973

EXERCICE 1

1. Après avoir rappelé quelle est la limite de $\dfrac{\text{Log}\,x}{x}$ lorsque le réel x tend vers plus l'infini, trouver, si elle existe, celle de $-x^2 + x + \text{Log}\,x$ lorsque x tend vers plus l'infini.
2. Étudier, l'ensemble de définition, la continuité, le sens de variation et la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction numérique f d'une variable réelle x définie par la relation

$$f(x) = -x^2 + x + \text{Log}\,x.$$

   Préciser la nature des branches infinies.
   Calculer en particulier $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.
   Prendre $\text{Log}\,2 \approx 0,69$; $\text{Log}\,3 \approx 1,1$.

EXERCICE 2

Existe-t-il un nombre entier naturel N qui s'écrit

$\overline{abcca}$ dans le système de base 5 ;
$\overline{bbab}$ dans le système de base 8 ?

PROBLÈME

Soit $\mathscr{P}$ le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, l'application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, qui au point M d'affixe $z = x + \text{i}y$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + \text{i}y'$ définie par

$$z' = 2a - a^2\overline{z}.$$

(a est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.)

1. Montrer que les équations de f s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha + 2\cos\alpha, \\ y' & = & -x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha + 2\sin\alpha. \end{array}\right.$$

2. **a.** Soit φ l'application linéaire du plan vectoriel P dans P, φ et P étant associés respectivement à f et $\mathscr{P}$.
   Montrer que φ est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle (D) dont on montrera qu'un vecteur est

$$\overrightarrow{u} = -\sin\alpha\,\overrightarrow{\imath} - \cos\alpha\,\overrightarrow{\jmath}.$$

   Que peut-on en déduire quant à la nature de f ?

   b. Soit $\text{O}' = f(\text{O})$, montrer que I, milieu du bipoint (O, O') est invariant par f.
   En définitive, comment désigne-t-on l'application affine f et comment la caractériser ?

   c. Écrire directement les équations de l'application réciproque f^{-1} de f et la relation qui exprime l'affixe z de M en fonction de l'affixe z' de M'.

3. Dans la suite du problème $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

Soit H l'homothétie du plan affine $\mathscr{P}$, de centre A de coordonnées $(0\,;\,2)$ et S la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y'y$.

a. Préciser l'intersection de $\mathscr{D}$ et de $y'y$, $\mathscr{D}$ désignant la droite affine contenant I et dirigée par le vecteur directeur

$$\overrightarrow{u} = -\sin\alpha\,\overrightarrow{\imath} - \cos\alpha\,\overrightarrow{\jmath}\,.$$

b. Soit $\Sigma = H \circ f \circ S$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, déterminer l'affixe z_2 du point M_2 image par Σ du point M_1 d'affixe z_1.

En déduire la nature de Σ et ses éléments caractéristiques.

Retrouver ces résultats sans l'aide des nombres complexes.