

♣ Baccalauréat C Aix–Marseille septembre 1978 ♣

EXERCICE 1

1. Déterminer tous les couples $(u; v)$ d'entiers relatifs vérifiant

$$5u - 3v = 0.$$

2. En déduire les couples $(p; q)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation

$$5p - 3q = 1.$$

3. Résoudre le système

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

EXERCICE 2

Soit P un plan affine euclidien et $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P .

1 Soit la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} $f : x \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x}$.

1. Montrer que f est une fonction impaire.

Étudier les variations de f et montrer que f définit une bijection de $] -1, +1[$ sur \mathbb{R} .

Tracer la courbe représentative de f dans P .

2. Soit g la fonction réciproque de f ; quelles propriétés (ensemble de définition, sens de variation, continuité) de la fonction g peut-on déduire de l'étude de la fonction f ?

Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} et que $g' = 1 - g^2$.

3. Calculer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2} dt, \quad \int_0^{\operatorname{Log} \sqrt{3}} (1-g^2(t)) dt.$$

PROBLÈME

Partie A

Soit P le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'application

$$F : \mathbb{R}^* \rightarrow P \quad t \mapsto m$$

telle que si x et y désignent les coordonnées de m dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

$$x = 2 \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad \text{et} \quad y = \left(t - \frac{1}{t} \right).$$

1. Soit H l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Montrer que $F(\mathbb{R}^* = H)$; on pourra poser $x' = \frac{x}{4} + \frac{y}{2}$.

Soient t et t' deux réels non nuls tels que $F(t) = m$ et $F(t') = m'$.

Calculer en fonction de $t' - t$ et de tt' les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{F(t)F(t')}$.

En déduire que F est bijective.

On désigne par H_1 l'intersection de H avec le demi-plan d'équation $x > 0$; montrer que $F(\mathbb{R}^*_+) = H_1$ où $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

2. Déterminer les deux premières dérivées \vec{V} et $\vec{\Gamma}$ de l'application F ; montrer que $\vec{\Gamma}$ a une direction fixe.
3. Tracer H_1 (on prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm).
Placer les points $A = F(1)$, $m_2 = F(2)$, $m_3 = F(3)$ et $B = F(-1)$.

Partie B

Soient $m(x; y)$ et $m'(x'; y')$ deux points de H ; on considère le point $M(X; Y)$ défini par

$$X = \frac{xx'}{4} \quad \text{et} \quad Y = \frac{xy' + x'y}{4}.$$

1. Calculer $\left(\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4}\right)\left(\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4}\right)$; montrer que M appartient à H .

On note $M = m * m'$. La loi $*$ est donc une loi de composition interne pour H .

Montrer que :

$$\forall (t; t') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, F(t) * F(t') = F(tt').$$

En déduire que F est un isomorphisme de (\mathbb{R}^*, \times) sur $(H, *)$.

2. En déduire que $(H, *)$ est un groupe commutatif.

Préciser l'élément neutre. Que représente $\overline{m} = F\left(\frac{1}{t}\right)$?

3. a. On suppose $m' \neq m$, $m' \neq \overline{m}$, et $M = m * m'$.

En utilisant le A 1., montrer que la droite (mm') est parallèle à la droite (AM) .

- b. On suppose $m' = \overline{m}$; montrer que la droite $(m\overline{m})$ est parallèle à la tangente en A à H .

- c. On suppose que $M = m * m$, $m \neq A$ et $m \neq B$; montrer que la droite (AM) est parallèle à la tangente en m à H .

- d. On reprend les notations du A 3.

De plus, on pose $m_4 = F(4)$, $m_3 = F\left(\frac{1}{3}\right)$ et $m_{\frac{4}{3}} = F\left(\frac{4}{3}\right)$.

Montrer que $m_4 = m_2 * \overline{m_2}$, et $m_{\frac{4}{3}} = m_4 * m_3$.

Construire géométriquement m_4 , puis m_3 , puis $m_{\frac{4}{3}}$.

- e. Soient trois points m, n, p de H tels que $m * n = q$ et $n * p = r$.

Montrer que, si $p \neq q$ et $m \neq r$, les droites (mr) et (pq) sont parallèles.

[Il est conseillé de calculer $(m * n) * p$ et $m * (n * p)$].

Partie C

Soit $C \in H$ et soit l'application

$$\begin{array}{ccc} \Phi : H & \rightarrow & H \\ m & \mapsto & \overline{m} * C \end{array}$$

On suppose que $m = F(t)$ et $C = F(c)$, c réel distinct de 1.

1. Démontrer que m est invariant par Φ si et seulement si $t^2 = c$.
En déduire que si C appartient à H_1 , Φ admet deux points invariants U et V , (on appellera U celui de ces deux points qui est situé sur H_1).
Montrer qu'alors H admet deux tangentes parallèles à la droite (AC) et que pour m distinct de U et V , la droite $(m\Phi(m))$ est parallèle à (AC) .
2. *Application* : soit $C = F(4) = m_4$.
Déterminer U , V et $\Phi(m_3)$.
Vérifier que la tangente en U à H est parallèle à (AC) .