Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1982 Aix-Marseille ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien orienté et $\mathscr{R} = \left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$un repère orthonormé de $\mathscr{P}$.
À tout nombre complexe z, $z = x + \text{i}y$, on associe le point M de coordonnées $(x~;~y)$ dans le repère $\mathscr{R}$. Le nombre complexe conjugué de z est noté $\overline{z}$. Soit (E) l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ dont l'affixe z vérifie la relation :

$$2\,|z|^2 - \frac{\text{i}}{2}\left(z^2 - \left(\overline{z}\right)^2\right) = 1.$$

Soit r la rotation affine de centre O et dont une mesure de l'angle est $\dfrac{\pi}{4}$ en radians. Soit (E$'$) l'image de (E) par r.

1. Déterminer une équation cartésienne de (E') dans le repère $\mathscr{R}$. Reconnaître la nature de (E$'$).
2. En déduire le tracé de (E) dans le repère $\mathscr{R}$; on prendra 5cm pour unité graphique.

EXERCICE 2 **5 points**

(La question 3. peut être traitée indépendamment des deux questions précédentes.)
On envisage une particule π pouvant occuper deux positions A et B se déplaçant aléatoirement de la façon suivante :

— La position initiale (au temps 0) de la particule π est A. Au temps n, $n \in \mathbb{N}^{\star}$, la particule π est soit en A soit en B.
— Entre deux instants successifs, n et $(n+1)$, la particule π saute éventuellement d'une position à l'autre.
Les divers facteurs influant sur cette évolution ne varient pas au cours du temps. L'éventualité d'un saut est par ailleurs indépendante de la position de la particule π au temps n.

On ne demandera pas d'expliciter les espaces probabilisés. Mais nous pouvons traduire en termes mathématiques la situation de la façon suivante :
si $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement « la particule π est en A au temps n » et B_n l'évènement « la particule π est en B au temps n ».
Ainsi $\text{A}_n \cap \text{A}_{n+1}$ est l'évènement « la particule π est en A au temps n et aussi au temps $(n+1)$ », ...
Soit respectivement α_n et β_n le probabilité des évènements A_n et B_n.
On donne un nombre θ dans l'intervalle $]0~;~1[$. Nous exprimerons les positions définies ci-dessus par les *hypothèses* :

— $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_n + \beta_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$,
— La probabilité de $\text{A}_n \cap \text{A}_{n+1}$ est $\theta\alpha_n$, celle de $\text{B}_n \cap \text{B}_{n+1}$ est $\theta\beta_n$.

1. Calculer, en fonction de θ et β_n, la probabilité de l'évènement $\text{B}_n \cap \text{A}_{n+1}$ (c'est à dire de l'évènement « la particule π se trouve en B au temps n et en A au temps $(n+1)$).
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, $\alpha_{n+1} = (2\theta - 1)\alpha_n + (1 - \theta)$.
3. Du résultat de la question précédente et de $\alpha_0 = 1$, déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, $\alpha_n = \dfrac{(2\theta-1)^n}{2} + \dfrac{1}{2}$.
Quelle est la limite de la suite (α_n) quand n tend vers $+\infty$?

PROBLÈME **5 points**

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f_k l'application de $]0\,;\,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{si}\quad k \neq 0 \quad f_k(x) = x^k\sqrt{1-x}, \qquad \text{et} \quad f_0(x) = \sqrt{1-x}.$$

I.

1. Étudier la continuité de f_k et la dérivabilité de f_k.
2. Donner, en distinguant selon la valeur de k, le tableau de variation de f_k.
   Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, tracer les courbes C_0, C_1 et C_2 représentatives de f_0, f_1 et f_2.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x$.
   Montrer, en intégrant par parties, que pour tout entier $k > 1$
   $$I_k = \frac{2k}{2k+3}I_{k-1}.$$
   En déduire une expression de I_k (que l'on ne cherchera pas à simplifier).
5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
   $$\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k+1}.$$

II. On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur l'intervalle fermé $[0\,;\,1]$ par :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \text{si } x \in [0\,;\,1[\quad \text{et } F(1) = 0.$$

1. Étudier la continuité de F sur $[0\,;\,1]$.
   Présenter son tableau de variations.
2. Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$, on note F_n la fonction définie pour tout $x \in [0\,;\,1]$ par :
   $$F_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_{n-1}(x).$$
   Calculer $F_n(x)$ et montrer que, pour tout x réel fixé dans $[0\,;\,1]$, $F(x)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $F_n(x)$.
3. Pour tout entier $n > 2$, on désigne par A_n l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{n}} F(x)\,\mathrm{d}x$.
   Calculer A_n. Déterminer la limite de A_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Établir que $\displaystyle\int_0^1 F_n(x)\mathrm{d}x$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.
   On pourra écrire :
   $$\int_0^1 F_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x - \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 F_n(x)\,\mathrm{d}x$$
   Majorer la deuxième intégrale du second membre en majorant $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ par $\sqrt{n}$, et majorer la dernière intégrale en majorant $F_n(x)$ par $\sqrt{n}$.