

Atelier AJa5 Xavier Gauchard (Irem et régionale de Basse Normandie)

Pourquoi une introduction géométrique du nombre i ?

C'est tout d'abord motivé par la lecture des programmes de terminale S¹ :

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Modalités
Géométrie plane : nombres complexes.	Le vocabulaire sera introduit à partir de considérations géométrique.	La vision des nombres complexes est d'abord géométrique : calculs sur des points du plan. Les repérages cartésien et polaire introduits en première conduisent naturellement à deux écritures d'un nombre complexe.

Dans un chapitre de géométrie, comment introduire à partir de considérations géométrique le vocabulaire, sans imposer arbitrairement le nombre i comme vérifiant $i^2 = -1$?

Il y a ensuite la difficulté des élèves à considérer i comme un nombre. Dans un article de Petit x, H. Rossel et M. Schneider² reprenaient la remarque de Guillaume, élève de 2^{ième} année post-bac pour illustrer cette incompréhension :

« Quand vous rencontrerez un nombre dont le carré est négatif, vous m'appellerez... J'aimerais bien voir à quoi ça ressemble ! ».

On peut y déceler un obstacle épistémologique. Leibniz écrivait au XVII^{ème} siècle

« Ces notions imaginaires ont ceci d'admirables que dans le calcul, elles n'enveloppent rien d'absurde ou de contradictoire et que cependant elles ne peuvent être présentées dans la nature des choses. ».

L'absence d'image pour les expressions imaginaires attendra leurs représentations par des segments orientés avec Wessel, Buée, Gauss et Argand. Celui-ci propose une construction qui donne une image aux imaginaires et qui les légitime³ dans son "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques."⁴

A la lecture des écrits d'Argand.

C'est à partir de ces écrits que dans le cadre du groupe lycées de l'IREM de Basse-Normandie, nous avons construit une progression pour la classe de terminale S. Argand explique d'abord que les nombres négatifs sont imaginaires si on adopte comme unité "le poids matériel, comme le gramme" ou "le franc matériel", mais pas si l'on prend "le franc de compte pour unité, afin d'évaluer la fortune d'un individu". Il prépare ensuite la construction géométrique des nombres en estimant que

"deux quantités d'une espèce susceptible de fournir des valeurs négatives étant comparées entre elles, l'idée de leur rapport est complexe. Elle comprend l'idée de rapport numérique dépendant de leurs grandeurs respectives considérées absolument et l'idée du rapport des directions ou sens auxquels elles appartiennent, rapport qui en est l'idée ou l'opposition".

Il réduit alors à deux cas qu'il note

$$+1 : +1 :: -1 : -1 \text{ et } +1 : -1 :: -1 : +1 ,$$

puis pose la question de la recherche selon son protocole de la moyenne géométrique et en particulier de

"la quantité x qui satisfait à la proportion $+1 : +x :: +x : -1$ ".

Sa réponse est

¹ Bulletin Officiel Hors-Série n°4 du 30 août 2001.

² Petit x n°63, année 2003, pages 53 à 71. Ces nombres que l'on dit « imaginaires »

³ En référence au chapitre " Une approche géométrique : une construction qui légitime." du livre Images, Imaginaires, Imaginations. Commission inter-IREM (Ellipses)

⁴ Téléchargeable en intégralité sur Gallica <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110283x.notice>

"qu'on parviendrait à ce but si l'on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel pût s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle, que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci est à la direction négative".

Ces quelques extraits constituent la trame du travail que nous proposons en terminale S. Les élèves ont même de meilleurs outils qu'Argand : la droite réelle et les vecteurs vus en seconde, les coordonnées polaires et les angles orientés vus en première.

Scénario et récit de classe.

Cela commence par l'activité d'introduction suivante, dont le but est d'associer points et nombres, puis opérations et constructions :

Sur "la droite des réels" (OU), les points A et B ont pour abscisses a et b , donner un procédé de construction pour obtenir les points suivants :	
le point S tel que $OS = a + b$	le point P tel que $OP = a \times b$
le point Q tel que $OQ = \frac{a}{b}$	le point M tel que $OM^2 = a \times b$

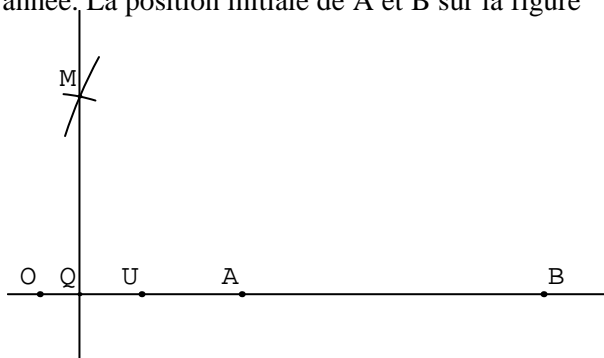
Les élèves utilisent le papier et le crayon. Pendant ce temps, est installé l'ordinateur portable et le vidéoprojecteur qui permettra de faire les figures selon le protocole donné par les élèves qui connaissent le logiciel, puis de vérifier si leurs constructions résistent aux déplacements de A et de B. Voici deux constructions du quotient proposées cette année. La position initiale de A et B sur la figure vidéoprojetée induit a et b positifs et même $b > a$.

Angélique construit le point M situé à b de B et à a de A. Le projeté orthogonal de M sur (AB) est

le point Q, avec $OQ = \frac{a}{b}$.

Cette construction donne le bon résultat comme sur le dessin avec $a = 2$, $b = 5$ et $q = 0,4$.

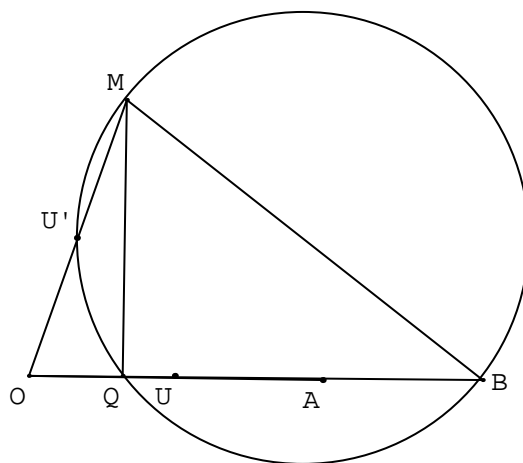
Si l'on meut le point B, la construction est valide. En revanche, si l'on meut le point A, la construction ne résiste pas.

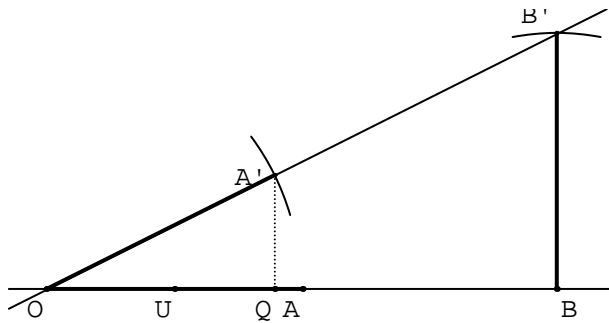


Cela fonctionne lorsque U est milieu de [OA] comme on peut le montrer en construisant le triangle OBM isocèle en B, puis le point A sur [OB] tel que $OA = OM$ et enfin Q pied de la hauteur issue de M du triangle OMB.

BQM rectangle en Q, Q est sur le cercle de diamètre [MB]. Soit U' est le point de [OM] tel que $OU' = OU$, en utilisant le théorème des milieux et le fait que $BM=BO$, U' est aussi sur le cercle de diamètre [MB]. En utilisant la puissance du point O par rapport à ce cercle, on a $OQ \times OB = OU' \times OM$, c'est à dire $OQ \times OB = OA$.

Remarque : Ce travail n'a pas été fait en classe, car la construction est difficile à critiquer et elle détourne la classe du travail initial

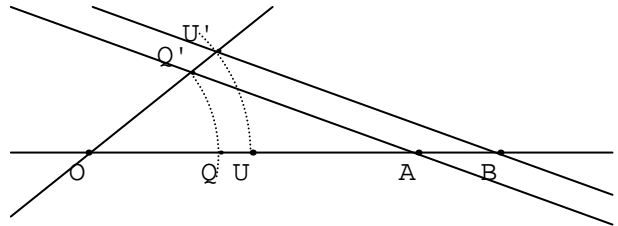




Camille place B' sur la perpendiculaire à (OA) passant par B et tel que $BB' = a$. Sur la droite (OB') , elle place A' tel que $OA' = a$, puis Q projeté orthogonal de A' sur (OA) . Cette construction ne conduit pas au résultat, mais en demandant de valider sa construction, celle-ci utilise le théorème de Thalès pour l'infirmer, puis pour l'amender et trouver une construction qui marche.

Bilan : la construction est clairement fautive, cependant elle fait avancer la classe.

La construction de Q (quotient) est plus facile pour les élèves que celle de P (produit). La configuration de Thalès et l'homothétie de centre A entraîne la comptine "A est à B ce que Q est à U", puis " a est à b ce que q est à 1". En déplaçant les points A et B , on remarque que la construction résiste lorsque $a < 0$...

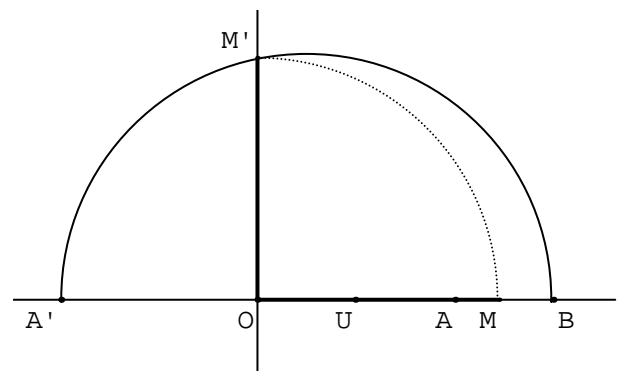
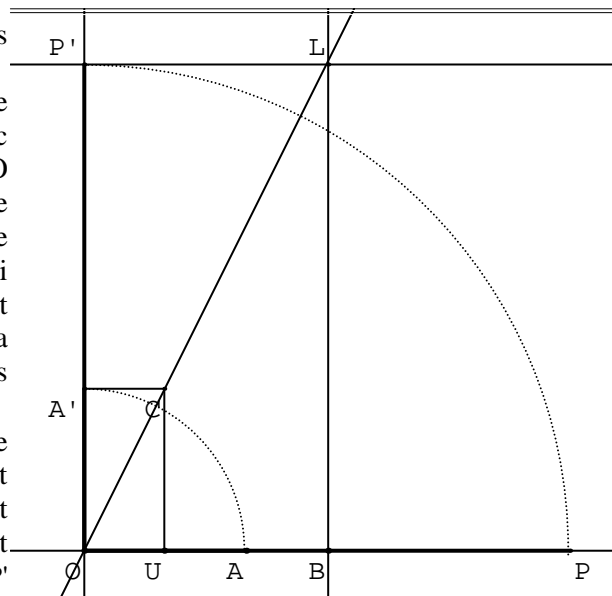


Lorsque la construction de Q est validée, les élèves qui ne l'ont pas réussie trouvent celle de P .

Voici une jolie construction, inspirée du travail de l'IREM de Paris VII⁵ que l'on peut démontrer avec les aires. On trace la droite d perpendiculaire en O à la droite des réels (OU) sur laquelle on reporte au compas le point A' . On construit le rectangle $OUCA'$, puis on trace la droite (OC) . Celle-ci coupe la perpendiculaire en B à (OU) en un point L . La parallèle à (OU) passant par L coupe la droite d en P' . On reporte P' sur la droite des réels pour obtenir le point P d'abscisse $p = a \times b$.

Quand a et b sont positifs, cette construction se justifie en montrant que les rectangles $OBKA'$ et $OUHP'$ ont la même aire. Ces deux triangles ayant en partie commune le rectangle $OUCA'$, il suffit de montrer que les rectangles $UBKC$ et $A'CHP'$ ont la même aire.

La moyenne géométrique est obtenue en construisant A' symétrique de A par rapport à O , puis le demi-cercle de diamètre $[A'B]$ qui coupe la perpendiculaire en O à (OU) en M' . M est alors le point de $[OU)$ tel que $OM = OM'$. Cette construction résiste au cas où a et b sont négatifs, mais pas aux cas où les deux nombres sont de signes contraires...



Bilan de l'activité : On associe nombres réels et points de la droite et on peut construire à partir de deux nombres réels positifs leur somme, leur produit, leur quotient et leur moyenne géométrique. Mais comment étendre cela aux nombres négatifs ? Le cas le plus simple est la construction du point A'

⁵ " Une approche géométrique : une construction qui légitime." Chapitre du livre Images, Imaginaires, Imaginations. Commission inter-IREM (Ellipses). M. Hallez et O. Kouteynikoff

associé à l'opposé de a : $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$. $OA' = OA$, et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OU'})$... "l'orientation de $\overrightarrow{OA'}$ est à celle de \overrightarrow{OA} , ce que l'orientation de $\overrightarrow{OU'}$ est à celle de \overrightarrow{OU} ".

On peut ainsi construire les points et leurs nombres associés en deux temps, par leur distance à O, puis par leur orientation ! Le but est d'arriver à la définition suivante pour quatre points A, B, C et D d'abscisses respectives a, b, c et d toutes différentes de 0.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Nous retrouvons la règle des signes pour le cas

$$\frac{p}{a} = \frac{b}{1} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} \frac{OP}{OA} = \frac{OB}{OU} \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Et en appelant U' le point d'abscisse -1 , peut-on alors construire M lorsque $a = 1$ et $b = -1$?

$$\frac{m}{1} = \frac{-1}{m} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} \frac{OM}{OU} = \frac{OU'}{OM} \\ (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OU'}) \pmod{2\pi} \end{cases}$$

La solution vient très vite. Cela ne gêne pas la classe de construire deux nombres attachés à des points en dehors de la droite réelle. A la question, ce nombre est-il un réel ? la réponse est non pour les élèves.

Bilan : il existe des nombres dont le carré est -1 , mais ces nombres ne sont pas des réels. Il n'y a pas de solutions réelles à l'équation $x^2 = -1$, mais il y a des solutions au-delà des réels.

Le vocabulaire des nombres complexes est alors une synthèse de ce travail avec une présentation en parallèle des points du plan et des nombres complexes. Le nombre attaché à un point, est appelé affixe (affixus est le participe passé du verbe affigere, qui veut dire attacher)... ce nombre est noté z .

Dans ce bilan, sont définis le module et l'argument, mais pas encore la partie réelle et la partie imaginaire.

Avant cela, on continue à construire d'autres nombres avec les opérations. On cherche z tel que $z^2 = -5$, puis tel que $z^2 = i$. En même temps, on additionne en étendant la règle "du bout à bout" édictée avec les réels. On obtient d'autres points et d'autres nombres et la question "tous les points du plan sont-ils attachés à un nombre ?" conduit à regarder les coordonnées...

Enquête a posteriori.

A partir des questions posées dans l'article de Petit x, les élèves ont à l'issue de l'étude de la notion répondu à quatre questions. Voici les réponses ordonnées selon leur occurrence.

Question 1 : Qu'avez-vous appris dans le chapitre relatif aux nombres complexes ?

- $i^2 = -1$
- Deux solutions lorsque $\Delta < 0$
- L'inverse d'un nombre complexe est égal à son opposé
- Nouvel ensemble de nombres prolongeant celui des réels.
- Il existe des nombres autres que les nombres réels.
- Que la géométrie est étroitement liée à l'algèbre.
- On peut associer les complexes aux fonctions exponentielles.
- Partie réelle, partie imaginaire, module, argument, conjugué...

- Les modules sont en fait des valeurs absolues généralisées
- Nouvelles règles de calcul
- Que tout ce que l'on a vu depuis la sixième peut être transposé dans l'imaginaire.
- Je n'ai rien compris à ce chapitre.

Question 2 : Ce chapitre vous a-t-il étonnés ?

- Oui pour le carré négatif
- Oui pour les solutions lorsque $\Delta < 0$
- Oui, que des nombres puissent être en dehors des réels.
- Oui, que $1/i = -i$
- Oui, les mathématiques prennent une autre dimension.
- Oui, mais tout en maths est étonnant.
- Pas vraiment, les maths étonnent toujours, donc à la fin, c'est habituel !
- Pas beaucoup, puisqu'en maths, une fois qu'on admet... ça passe !
- Oui, au début, mais moins après car les formules ressemblent beaucoup aux cours précédents.
- Non, on peut s'attendre à tout avec les maths !

Question 3 : Si vous deviez expliquer à un non initié ce qu'est un nombre complexe, que lui diriez-vous ?

- C'est un nombre qui ne se situe pas sur la droite des réels, mais qu'on peut quand même placer.
- C'est un nombre réel auquel on ajoute une partie imaginaire, ce qui donne un nouveau nombre plus compliqué, donc « complexe ».
- Il se situe sur le cercle trigonométrique ou hors du cercle trigonométrique. Sa distance au pôle est le module, son angle est son argument.
- Il est représenté par une partie réelle et une partie imaginaire (abscisse et ordonnée), on peut faire plein de calculs avec, on peut aussi faire de la géométrie.
- Un nombre qui ne respecte pas les règles arithmétiques de base.
- C'est un nombre sorti de la droite réelle. Les imaginaires sont sur la droite perpendiculaire à la droite réelle.
- Prolongement de R

Question 4 : Phrase d'élève : "je ne comprends pas comment le carré d'un nombre peut être négatif"; Si vous étiez le professeur, que répondriez-vous à cet élève ?

- Ce n'est pas un nombre réel, mais un imaginaire, donc les propriétés sont différentes.
- On ne te demande pas de comprendre, mais d'admettre cette solution car ce n'est pas un nombre réel mais imaginaire.
- C'est comme admettre que $2+2=4$, il faut l'admettre pour avancer. Les maths, ce n'est pas la réalité, on peut dire ce qu'on veut à la base, du moment qu'on s'y tient et que ça finit par être cohérent !
- Un nombre négatif multiplié par ce nombre négatif est positif.
- Moi non plus je ne comprends, mais je l'applique et ça fonctionne très bien.
- Ce nombre est différent. Si l'on écrivait tous les nombres réels sur une droite, ce nombre serait en dehors de cette droite.

Et maintenant que vais-je faire ?

La lecture de travaux d'historiens des mathématiques permet entre autres de voir comment la perception d'une notion a pu évoluer au cours des siècles. Un plaisir de l'enseignement est ensuite d'entendre les élèves reprendre les questions et les erreurs de leurs aînés (du moins celles que l'on imagine). D'autres travaux de classe, comme le problème des partis⁶ pour introduire la notion de probabilités où les mesures astronomiques pour redéfinir la moyenne⁷ vont dans ce sens. Cela me semble de plus un contenu d'atelier pour les journées nationales de l'APMEP à Besançon sur le thème "*le temps des mathématiques*".

⁶ A partir de travaux du Cercle d'Histoire des Sciences de l'IREM de Caen.

⁷ A partir de l'article "moyenne, médiane, écart-type, quelques regards sur l'histoire pour éclairer l'enseignement des statistiques au lycée" de A. Boyé et M-C Comairas, Repères-IREM n°48.