Baccalauréat série mathématiques Alger juin 1956

I. 1er sujet

Démontrer que la courbe représentative de la fonction

$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

admet pour asymptote la droite d'équation $y = x + 1$.
Quelle est la distance des deux points de même abscisse, x, pris l'un sur la courbe, l'autre sur son asymptote ?
Pour quelles valeurs de x cette distance est-elle moindre que $\frac{1}{10}$?

I. 2e sujet

Expliquer sur l'exemple

$$\left\{\begin{array}{rcl} mx + (m+1)y & = & 4m \\ (m-1)x - 3my & = & 2m - 3 \end{array}\right.$$

la résolution et la discussion d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues, x, y.

I. 3e sujet

Démontrer que le rapport $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 lorsque l'arc x mesuré en radians, tend vers 0.
En déduire le calcul de la dérivée de la fonction

$$y = \cos x.$$

II.

Étant donnés deux points fixes F et I, dont la distance est FI $= d$, on considère les ellipses (E), d'excentricité e, qui ont pour foyer F et pour directrice associée une droite variable D passant par I.

1. D étant donnée, construire les quatre sommets, A, A′, B, B′, de l'ellipse (E). En désignant par u l'angle de D avec IF, calculer la longueur du grand axe AA′ de l'ellipse (E).
   Déterminer D de manière que AA′ ait une longueur donnée. Discuter.
2. H étant la projection de F sur D, montrer que les rapports $\frac{\overline{\text{FA}}}{\overline{\text{FH}}}$ et $\frac{\overline{\text{FA}'}}{\overline{\text{FH}}}$ restent constants quand D varie en passant par I.
   Lieux géométriques des sommets A, A′, du centre O, du deuxième foyer, F′, de l'ellipse (E).
   Que peut-on dire de la façon dont se déplacent le petit axe et la deuxième directrice, D′ ?
3. Indiquer comment varie le triangle FOB.
   Lieux géométriques des sommets B, B′.
   Un point B étant choisi sur son lieu, déterminer le centre, les autres sommets, le deuxième foyer et les directrices de l'ellipse (E) dont le petit axe a une extrémité en B.
4. On mène de I les tangentes à une ellipse (E), leurs points de contact étant M, M′.
   Que peut-on dire des angles MFI et M′FI ?
   Que peut-on en conclure pour la ligne (L) sur laquelle se déplacent M et M′ ?
   M étant un point pris sur (L), peut-on construire la directrice D de l'ellipse (E) qui est tangente en M à IM ?
   Lieu géométrique de M et M′.
   Préciser la nature de la figure formée par les points M, M′, F et le point J où D rencontre (L).
   D étant donnée, montrer que J est le centre d'homothétie des cercles de centres M et M′ qui passent par F.
   Construire les points M, M′ pour une position de D donnée.

N. B. Les constructions demandées seront faites en prenant FI = 3 cm et $e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.