Baccalauréat Mathématiques Alger septembre 1955

I.
1^er^ sujet

Limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ quand x, exprimé en radians, tend vers 0.
Application : Dérivée de $y = \cos x$.

I.
2^e^ sujet

On donne trois nombres positifs, a, b, c, tels que $a^2 = b^2 + c^2$, trois points alignés F$'$, F, H (F entre F$'$ et H) dont les distances mutuelles sont F$'$F $= 2c$ et FH $= \dfrac{b^2}{c}$, et la droite D perpendiculaire en H à F$'$FH.
Montrer que le lieu des points M, dont la somme des distances à F et F$'$ est constante et égale à $2a$, est le même que le lieu des points P dont le rapport des distances à F et à D est constant et égal à $\dfrac{c}{a}$.

I.
3^e^ sujet

Donner la liste des planètes du système solaire :

1. dans l'ordre de leurs distances au Soleil, indiquées en prenant pour unité la distance de la Terre au Soleil ;
2. dans l'ordre de leurs masses, indiquées en prenant pour unité la masse de la Terre.

Énoncer les lois de Képler et donner, pour chaque planète, la durée, en années, de sa révolution autour du Soleil.

II.

On considère un cercle (C) de diamètre A$'$A $= 2a$ et de centre O.
À tout point M_1 de (C), projeté orthogonalement en H sur A$'$A, on associe le point M du segment HM_1 tel que $\overline{HM_1}^2 = 2\overline{HM}^2$.

1. Connaissant M_1 et la tangente en M_1 à (C), donner une construction géométrique de M et du point T où la tangente en M au lieu (E) de M rencontre le diamètre A$'$A.
   La tangente MT coupe en S la perpendiculaire en A à A$'$A.
   Montrer que OS passe par le milieu de AM.
   Construire le pôle, M', de MT par rapport au cercle (C).
   Établir que le rapport $\dfrac{\overline{HM_1}}{\overline{HM'}}$ garde une valeur constante et que la tangente en M' au lieu (E$'$) de M' est la polaire de M par rapport à (C).
   Écrire les équations de (E) et (E$'$) lorsque le diamètre A$'$A est pris pour axe Ox et le diamètre perpendiculaire pour axe Oy.
   Placer soigneusement sur la figure les sommets et les foyers des ellipses (E) et (E$'$).
2. On prend sur la tangente D en A au cercle (C) un point P variable. Soient L le point où PA$'$ rencontre à nouveau le cercle (C) et K la projection orthogonale de L sur A$'$A. La droite AI, qui joint A au milieu I de KL, coupe A$'$P en M et la droite AL coupe en M$'$ la perpendiculaire MH à A$'$A.
   Montrer que le rapport $\dfrac{\overline{HM}^2}{H\mathrm{A}\cdot H\mathrm{A}'}$ reste constant quand P décrit D.
   Quelle est la valeur de cette constante ?
   En déduire les lieux géométriques, (E) et (E$'$), de M et M_1 et les identifier avec ceux trouvés au **1.**

3. Trouver le lieu du point d'intersection, Q, de AM et A$'M'$.

Construire le pôle S de AL par rapport au cercle (C) et montrer que OS passe par le milieu de AM.

En déduire le lieu du point de rencontre de la tangente en L au cercle (C) et de la tangente en M au lieu de M.

Montrer qu'on peut définir le point M' à partir d'un point variable, P$'$, de la tangente D$'$ en A$'$ à (C) par une construction analogue à celle qui détermine M à partir de P.

Quel est le lieu du point de rencontre, S$'$, de la tangente en L au cercle (C) et de la tangente en M$'$ au lieu de M' ?

Quelle relation y a-t-il entre les longueurs AP et A$'$P$'$?

Où se trouve le point d'intersection de PP$'$ et SS$'$?

En déduire l'enveloppe de PP$'$.