Durée : 4 heures

Baccalauréat C Étranger groupe 2 [1] septembre 1992

EXERCICE 1 **4 points**

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 9,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \quad \text{et } v_n = u_n + 6.$$

1. **a.** Montrer que (v_n) est une suite géométrique à termes positifs.

   b. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n et en déduire la somme $S'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

   Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} S'_n$.
2. On définit la suite (w_n) par $w_n = \ln v_n$ pour tout entier n.
   Montrer que (w_n) est une suite arithmétique.
   Calculer $S''_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$ en fonction de n et déterminer $\lim_{n\to+\infty} S''_n$.
3. Calculer le produit $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdots v_n$ en fonction de n.
   En déduire $\lim_{n\to+\infty} P_n$.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans un plan euclidien orienté, on considère quatre points A, B, C, D ne formant pas un trapèze. Les droites (AD) et (BC) se coupent en I. les droites (AB) et (DC) se coupent en J.

1. Soit O le centre de la similitude plane directe S telle que $S(\text{A}) = \text{B}$ et $S(\text{D}) = \text{C}$.

   a. Démontrer que $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OD}}\right) = (\overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OC}}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}$.

   b. Demontrer que $\dfrac{\text{OC}}{\text{OB}} = \dfrac{\text{OD}}{\text{OA}}$.
   En déduire que O est le centre de la similitude directe S' telle que $S'(\text{A}) = \text{D}$ et $S'(\text{B}) = \text{C}$.
2. En utilisant les similitudes S et S', démontrer que les cercles circonscrits aux quatre triangles IAB, IDC, JAD et JBC ont le point O en commun.

PROBLÈME **12 points**

Partie 1

On désigne par g la fonction numérique définie sur $[0\ ;\ \pi]$ par

$$g(x) = x\cos x - \sin x.$$

Étudier g et dresser son tableau de variation. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ \pi]$.

1. Algérie, Djibouti, Gabon, Mali, Maroc, Sénégal

Partie 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0~;~\pi]$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 1\\ f(x) & = & \dfrac{\sin x}{x} \quad \text{si } x \in]0~;~\pi] \end{array}\right.$$

1. Démontrer que f est continue sur $[0~;~\pi]$.

2. Étudier les variations de f sur $]0~;~\pi]$.
Tracer la courbe représentative de f sur $[0~;~\pi]$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
(On admettra que le nombre dérivé de f en zéro est zéro.)

3. En déduire que pour x de $\left[0~;~\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a $\dfrac{2}{\pi} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Partie 3

On se propose d'étudier la fonction définie sur $[0~;~\pi]$ par :

$$F(x) = \int_x^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(On ne cherchera pas à calculer une primitive de f.)

1. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. **a.** En utilisant la question II. 3., démontrer que pour $0 < x \leqslant \pi$, on a :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{2x}{\pi^2} \leqslant \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right) 2\,\mathrm{d}t.$$

b. Calculer la valeur en π des fonctions définies sur $]0~;~\pi]$ respectivement par :

$$x \longmapsto \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad x \longmapsto \int_x^{\pi} \frac{2}{u^2} \sin^2 \frac{u}{2}\,\mathrm{d}u,$$

puis calculer leur fonction dérivée.
En déduire l'égalité des deux fonctions.

c. Déduire de 2. a. et b. que :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{2x}{\pi^2} \leqslant \int_x^{\pi} \frac{2}{u^2} \sin^2 \frac{u}{2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

3. **a.** En prenant $t \longmapsto 1 - \cos t$ comme primitive de $t \longmapsto \sin t$ et en intégrant par parties, démontrer que pour tout x de $]0~;~\pi]$:

$$\int_x^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} + \frac{\cos x - 1}{x} + \int_x^{\pi} \frac{1 - \cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b. Calculer la limite de $\dfrac{\cos x - 1}{x}$ lorsque x tend vers 0.

c. Démontrer que :

$$\int_x^{\pi} \frac{1 - \cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^{\pi} \frac{2}{t^2} \sin^2 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t.$$

d. En déduire que :

$$\frac{4}{\pi} - \frac{2x}{\pi^2} + \frac{\cos x - 1}{x} \leqslant \int_x^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} + \frac{\cos x - 1}{x}.$$

e. En déduire que :

$$\frac{4}{\pi} \leqslant \int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}.$$

4. **a.** Dresser le tableau de variations de F sur $[0 ; \pi]$.

b. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction F dans un plan rapporté à un repère orthonormé.