Durée : 4 heures

Baccalauréat Algérien[1] juin 1969

EXERCICE 1

Mettre l'expression $\sin x - \sqrt{3}\cos x$ sous la forme $A\cos(x-\varphi)$.
En déduire les nombres x solutions de l'équation

$$\sqrt{\sin x - \sqrt{3}\cos x + 2} = \sqrt{3}.$$

EXERCICE 2

Soit a et b des nombres rationnels non nuls ; on appelle (E) l'ensemble des nombres x de la forme $a + b\sqrt{3}$.

1. Soit deux nombres, x et x', de l'ensemble (E), définis par

$$x = a + b\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x' = a' + b'\sqrt{3}.$$

   Démontrer que x et x' sont égaux si, et seulement si,

$$a = a' \quad \text{et} \quad b = b'.$$

2. On définit, dans l'ensemble (E), la loi, notée T, par la relation

$$(a + b\sqrt{3})\,T\left(a' + b'\sqrt{3}\right) = aa' + bb'\sqrt{3}.$$

   La loi T est-elle associative ?
   Existe-t-il dans l'ensemble (E) un élément neutre pour cette loi ?
   Chaque élément de l'ensemble (E) admet-il un symétrique pour cette loi ?
   L'ensemble (E) présente-t-il une structure de groupe pour la loi T ?

PROBLÈME

1. Dans un repère orthonormé on désigne par $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$ les axes de coordonnées. Tracer dans ce repère l'hyperbole (H) d'équation

$$y^2 - 3x^2 + \frac{4}{3}a^2 = 0 \quad (a > 0).$$

   Préciser les foyers, les sommets et les asymptotes de cette hyperbole.
2. Soit M un point de la droite $y'y$, d'ordonnée m.
   À tout nombre r réel positif on associe le cercle (C), de centre M et de rayon r.
   a. m étant donné, discuter, suivant les valeurs de r, le nombre de points d'intersection des courbes (C) et (H).
   Calculer, en fonction de m, la valeur de r pour laquelle les courbes (C) et (H) sont tangentes en deux points.
   Dans toute la suite du problème on ne considérera que ce cas et l'on désignera alors par P_1 et P_2 les deux points de contact de ces courbes et par (γ) le cercle (C) correspondant.

1. Le programme de ce baccalauréat et la nature des épreuves ne sont pas les mêmes que ceux du baccalauréat français.

b. Écrire l'équation de la droite P_1P_2.

3. a. Montrer que le rayon du cercle (γ) est égal à la moitié de la distance de son centre, M, à un foyer, F, de l'hyperbole (H).

b. On désigne par I le point de la droite MF conjugué du point F par rapport au cercle (γ).

Montrer que les points 1 et M sont homologues dans une homothétie de centre F, dont on précisera le rapport.

En déduire que le point I appartient à la droite P_1P_2. Quel est l'ensemble des points I lorsque M décrit la droite $y'y$?

4. Soit $\left(\gamma'\right)$ l'inverse du cercle (γ) dans l'inversion de pôle F et de puissance $2a^2$; soit M' le centre du cercle $\left(\gamma'\right)$.

a. Quel est l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit la droite $y'y$?

b. Montrer que les cercles $\left(\gamma'\right)$ sont orthogonaux à un cercle fixe, que l'on précisera.

Construire les inverses, P'_1 et P'_2, des points P_1 et P_2 ?

c. Montrer que la droite $P'_1P'_2$ passe par un point fixe, A.

En déduire que l'ensemble (H'), inverse de l'hyperbole (H) dans l'inversion $\left(\text{F},\ 2a^2\right)$, est invariant dans une inversion, que l'on précisera.