Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1985 Algérie ∽

EXERCICE 1 **5 points**

On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et on note P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, $\vec{u}$ ayant pour affixe 1 et $\vec{v}$ ayant pour affixe i (unité graphique : 2 cm).

L'objet de l'exercice est d'étudier l'application f de $\mathbb{C} - \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f~:\quad z \longmapsto Z = 1 - \dfrac{2\text{i}}{z-1}.$$

1. Soit a un nombre réel strictement positif.
   Déterminer l'ensemble C_a des points M d'affixe Z tel que $|Z-1| = a$ et l'ensemble C'_a des points m d'affixe z tels que $f(z)$ appartienne à C_a (on pourra exprimer $|Z-1|$ en fonction de $|z-1|$).
2. On pose $z = x + \text{i}y$ et $Z = X + \text{i}Y$.
   Exprimer $X - 1$ et Y en fonction de x et y.
   a. Déterminer l'ensemble D' des points m tels que $f(z)$ appartienne à l'ensemble D des nombres réels.
   b. Soit Δ l'ensemble des points M tels que $Z - 1$ soit imaginaire pur.
   Déterminer l'ensemble Δ' des points m tels que $f(z)$ appartienne à Δ.
3. Dessiner C_2, ; D et Δ sur une même figure.
   Dessiner C'_2, D' et Δ' sur une autre figure.

EXERCICE 2 **6 points**

L'objet de l'exercice est d'étudier la suite de terme général : i ·xn

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\text{d}x,\quad \text{où } f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x}}.$$

(on convient que $x^0 = 1$).

1. Calculer la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$, x étant un point donné de $[0~;~1]$.
2. Calculer u_0 et u_1 en effectuant le changement de variable $t = 1 + x$.
3. Comparer x^n à x^{n+1} lorsque $x \in [0~;~1]$.
   En déduire que la suite (u_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer u_n).
4. Déterminer le maximum et le minimum de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, sur $[0~;~1]$.
   En déduire un encadrement de u_n. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. En observant que $u_{n-1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1+x}\,\text{d}x$ établir que $u_{n-1} + u_n \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{n}$.
6. À l'aide des résultats précédents, établir que :

$$\dfrac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2n}.$$

   En déduire la limite de nu_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME **9 points**

Soit l'équation différentielle :

$$y'' + y' + \frac{17}{4}y = 0 \qquad (1).$$

1. Déterminer l'unique solution f de cette équation sur $[0~;~+\infty[$ telle que :

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'(0) = \sqrt{3} - \frac{1}{4}.$$

2. Écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\cos(2x - \varphi),$$

où φ est un élément de $[0~;~\pi/2]$ que l'on précisera.

3. Préciser l'ensemble des points x de $[0~;~+\infty[$ tels que $f(x) = 0$; on rangera ces points en une suite strictement croissante $(a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n,\ \ldots)$.

4. Établir que pour tout point x de $[0~;~+\infty[$, $|f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x/2}$.
Préciser l'ensemble de points x tels que $f(x) = \mathrm{e}^{-x/2}$, puis tels que $f(x) = -\mathrm{e}^{-x/2}$. On rangera ces points en des suites strictement croissantes $(b_0,\ b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n,\ \ldots)$ et $(c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots,\ c_n,\ \ldots)$.

5. Dans un plan P rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ tracer les courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x/2}$ et $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x/2}$, où $x > 0$, et donner l'allure de la courbe représentative de f (on ne demande pas d'étudier le sens de variation de f et on choisira les unités graphiques sur Ox et Oy de manière à faciliter la lecture du graphique).

6. En utilisant l'équation (1), calculer $g(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$, où $a > 0$.
Déterminer la limite de $g(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.