

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat Algérie juin 1965 ∞

Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE I

I.

La lettre m désignant un paramètre réel, résoudre et discuter l'équation

$$\sqrt{x^3 + x^2 + (m+3)x + 1} = x + 1.$$

II.

Montrer que, si l'entier n n'est pas multiple de 3,

$$5^{2n} + 5^n + 1 \text{ est divisible par } 31.$$

III.

On donne un cercle (O), de centre O et de rayon R, ainsi que la tangente $x'x$ en un point A de ce cercle. Sur $x'x$ on fixe un point P tel que

$$AP = 2R = d.$$

Une demi-droite Py issue de P fait avec PA un angle θ et coupe le cercle (O) en B et C. On désigne par (γ) le cercle de centre (ω) orthogonal à (O) en B et C.

1. Quel est l'ensemble des points (ω) lorsque la droite Py varie?
2. On transforme la figure dans l'inversion de pôle A de puissance AP^2 .
 - a. Construire avec précision la figure inverse.
 - b. Constater que les cercles (γ'), homologues des cercles (γ), ont tous le même centre I, que l'on précisera.
3.
 - a. Utiliser l'inversion ci-dessus pour trouver la position de Py pour laquelle (γ) est également orthogonal au cercle (σ) de rayon $\frac{R}{2}$ tangent en P à Px du même côté que le cercle (O).
 - b. Utiliser une construction ne faisant pas intervenir l'inversion.
4. Établir les relations suivantes :

$$\theta = \widehat{B} - \widehat{C}, \quad \sin B \sin C = \sin \theta,$$

où B désigne l'angle de sommet B du triangle ABC et C l'angle de sommet C du triangle ABC (on supposera $\widehat{B} > \widehat{C}$ et $0 < \theta < 90^\circ$).