Baccalauréat C Amérique du Sud décembre 1969

EXERCICE 1

Étant donné un carré ABCD de côté a, on associe à tout point M du plan la fonction vectorielle f définie par

$$\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} - 2\overrightarrow{M\text{C}} - 2\overrightarrow{M\text{D}}.$$

Démontrer que, lorsque M décrit le plan ABCD, $\overrightarrow{f(M)}$ reste équipollent à un vecteur fixe, que l'on déterminera. En déduire l'ensemble des points M du plan ABCD tels que

$$\left|\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}} + \overrightarrow{M\text{D}}\right| = \left|\overrightarrow{f(M)}\right|.$$

EXERCICE 2

Soit f et g les fonctions de la variable réelle x définies par

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Construire en repère orthonormé les graphes (C_1) et (C_2) de f et g.
Déterminer l'aire, $\mathscr{A}$, du domaine limité par (C_1), (C_2) et les droites d'équations respectives

$$x = 2 \quad \text{et} \quad x = n,\ n > 2.$$

Quelle est la limite de $\mathscr{A}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 3

On désigne par a et b deux nombres réels et par R l'image du couple $(a~;~b)$, dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
On étudie la transformation T du plan complexe qui, au point M d'affixe Z, $Z \neq b$, fait correspondre le point M' d'affixe Z' défini par la relation .

$$Z' = T(Z) = \frac{a+Z}{b-Z}$$

1. Déterminer l'ensemble (E) des points R tels que la transformation T admette un point double et un seul.
   Pour tout point R n'appartenant pas à (E), la transformation T admet deux points doubles H et K d'affixes h et k. Déterminer les régions dans lesquelles doit se trouver R pour que h et k soient réels ou ne le soient pas.
2. Déterminer $T \circ T(Z)$ et $T \circ T \circ T(Z)$.
   En déduire que la relation $a = b^2 + b + 1$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $T \circ T \circ T$ soit l'application identique.
   Montrer qu'il n'existe aucun point R tel que la transformation T admette deux points doubles H et K d'affixes réelles et que $T \circ T \circ T$ soit l'identité.
3. Déterminer h et k pour $a = 3$ et $b = 1$ (on notera H le point double d'ordonnée positive).
   a. Démontrer que

   $$\frac{Z-h}{Z-k} : \frac{Z'-h}{Z'-k}$$

   est indépendant de M. En déduire que T conserve globalement le faisceau de cercles à points limites H et K.

b. Montrer que la transformation $S = U \circ T \circ U^{-1}$ est une rotation, que l'on caractérisera, U désignant la transformation définie par

$$U(Z) = \frac{-Z + \text{i}\sqrt{3}}{Z + \text{i}\sqrt{3}}.$$

4. Lorsque $a = 1$ et $b = 3$, déterminer le point double unique N, d'affixe n, de la transformation T.
Montrer qu'alors $W = V^{-1} \circ T \circ V$ est une translation, que l'on caractérisera, V désignant la transformation définie par

$$V(Z) = \frac{Z}{Z-1}$$

N. B. - Les questions **2**, **3** et **4** sont indépendantes les unes des autres, ainsi que les parties **a** et **b** de la troisième question.