Durée : 4 heures

Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1992

EXERCICE 1 **4 points**

Soit dans un plan orienté les trois points A, B et C non alignés tels que AB < AC. On pose $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \alpha \quad$ modulo (2π).
Soit d_1 la demi-droite de support (AB), d'origine B, ne contenant pas le point A.
Soit d_2 la demi-droite d'origine C contenant A.
On place sur d_1 un point M différent de B et sur d_2 un point N tel que CN = BM.

1. Justifier l'existence d'une unique rotation r transformant B en C et M en N. Préciser l'angle de r en fonction de α.
2. **a.** Démontrer que le centre O de r est situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

   b. Déterminer la position du point O.
3. Soit f la similitude directe de centre O transformant B en M.

   a. Démontrer que $f \circ r = r \circ f$.

   b. En déduire que $f(\text{C}) = \text{N}$, puis que $\dfrac{\text{MN}}{\text{BC}} = \dfrac{\text{OM}}{\text{OB}}$.
4. Construire les points M sur d_1 et N sur d_2 sachant que BM = CN et MN = BC.

EXERCICE 2 **4 points**

Une unité de longueur étant choisie, on considère dans un plan un triangle ABC rectangle en A tel que AB = $2a$ et AC = a, où a est un réel positif donné.

1. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que :

$$\left\| \overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}} \right\|.$$

2. On désigne par H le point du plan tel que :

$$\overrightarrow{\text{AH}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{AC}}.$$

   a. Démontrer que H est le barycentre des points A, B et C affectés de coefficients que l'on déterminera.

   b. On considère l'ensemble des points M du plan tels que :

$$-3M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + 4M\text{C}^2 = k.$$

   Pour quelle valeur du nombre réel k, cet ensemble contient-il le point A ? Pour cette valeur préciser l'ensemble obtenu, noté E_2 et le construire.

PROBLÈME **12 points**

L'objet du problème est l'étude d'une famille de fonctions.
Pour n **entier naturel non nul**, on définit sur $[0~;~+\infty[$ la fonctionn numérique f_n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_n(x) & = & x^n(2\ln x - 1) \quad \text{si} \quad x \in]0~;~+\infty[\\ f_n(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (l'unité graphique est 4 cm).

A. Dans toute cette partie, $n = 1$

1. **a.** Étudier la continuité et la dérivabilité de f_1 sur $[0 ; +\infty[$.
   b. Étudier le sens de variation de f_1.
   c. Étudier la limite de f_1 en $+\infty$.
   d. Préciser la tangente à $(\mathscr{C}_1)$ au point O.
2. Soit le point M_0 d'abscisse x_0 strictement positive de la courbe $(\mathscr{C}_1)$.
   a. Montrer que la tangente en M_0 à $(\mathscr{C}_1)$ coupe l'axe des ordonnées en un point T_0 dont on donnera les coordonnées.
   b. En déduire une construction simple de la tangente à $(\mathscr{C}_1)$ au point M_0.
3. On désigne par A le point de $(\mathscr{C}_1)$ d'ordonnée nulle, autre que O.
   Tracer la tangente en A à $(\mathscr{C}_1)$ puis la courbe $(\mathscr{C}_1)$.
4. Soit α un réel de l'intervalle $]0 ; \text{e}]$; à l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\alpha}^{\text{e}} t \ln t \, \text{d}t$.
5. **a.** Étudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et de la droite (Δ) d'équation $x - y = 0$. On précisera les points d'intersection.
   b. Calculer, en cm^2, l'aire $S(\alpha)$ de la portion de plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C}_1)$, la droite (Δ) et la droite d'équation $x = \alpha$.
   c. Calculer $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} S(\alpha)$.

Dans cette partie on étudie f_n pour $n \geqslant 2$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n sur $[0 ; +\infty[$.
2. Déterminer la fonction dérivée f_n'.
3. On désigne par x_n la valeur, autre que 0, pour laquelle f_n' s'annule.
   a. Montrer que pour tout entier n $(n \geqslant 2)$, on a : $1 \leqslant x_n < \sqrt{\text{e}}$.
   b. Étudier la variation de la suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$.
   c. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$ converge et trouver sa limite.
4. **a.** Étudier la limite de f_n en $+\infty$.
   b. Dresser pour $n \geqslant 2$, le tableau de variation de f_n ; en déduire que pour $n \geqslant 2$, $f_n(x) \leqslant -1$.
   c. Étudier $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(x_n)$.
5. Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $[0 ; +\infty[$ la fonction g_n par :

$$g_n(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

   Étudier le signe de $g_n(x)$ et en déduire la position relative des courbes $(\mathscr{C}_n)$ et $(\mathscr{C}_{n+1})$.
6. Tracer soigneusement la courbe $(\mathscr{C}_2)$ dans le même repère que $(\mathscr{C}_1)$ en mentionnant sa tangente en O.