Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Montréal et New York ∾ septembre 1968

EXERCICE 1

1. Déterminer, dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, toutes les solutions de l'équation

$$2x - 3y = 0.$$

2. Déterminer, dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, une solution de l'équation

$$2x - 3y = 3.$$

   En déduire toutes les autres solutions.

EXERCICE 2

Le nombre e désignant la base des logarithmes népériens, a et b deux constantes réelles, avec $a \neq 0$, on considère, sur la courbe (C), d'équation

$$y = a\mathrm{e}^x + b,$$

le point M, d'abscisse x.

1. Quelle est l'équation de la tangente en M à la courbe (C) ?
2. Soit K l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.
   Quelle est l'abscisse z du point K ?
3. Calculer la différentielle dz. Comment faut-il choisir b pour que dz = dx ?

EXERCICE 3

1. Construire les quatre courbes représentées en repère orthonormé (Ox, Oy) par les équations suivantes :

$$\begin{array}{lrcl}
(\Gamma_1) & y^2 + 2x^2 - 8x + 6 & = & 0,\\
(\Gamma_2) & y^2 - x^2 + 4x - 3 & = & 0,\\
(\Gamma_3) & y^2 - x^2 - 2x - 5 & = & 0,\\
(\Gamma_4) & y^2 - x + 1 & = & 0.
\end{array}$$

   On indiquera la nature de chacune de ces quatre courbes et l'on donnera pour chacune d'elles, lorsqu'il y a lieu, les coordonnées du centre de symétrie et des sommets, ainsi que les équations des asymptotes.
2. Soit Ω le point d'abscisse 2 et d'ordonnée 0.
   On considère le repère orthonormé $(\Omega X,\ \Omega Y)$ tel que la direction de l'axe ΩX fasse avec la direction de l'axe Ox un angle de $-\dfrac{\pi}{4}$ se déduisant de ΩX par une rotation de $+\dfrac{\pi}{2}$, de centre Ω.
   Quelle est l'équation de la courbe (Γ_2) rapportée au système d'axes $(\Omega X,\ \Omega Y)$?

3. On considère la courbe (C) représentée par l'équation $XY = \dfrac{1}{2}$ dans le système d'axes $(\Omega X,\ \Omega Y)$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C) au point M_0 de (C) dont l'abscisse, dans le système orthonormé $(\Omega X,\ \Omega Y)$ est égale à un nombre donné $X_0 \neq 0$.
Soit A et B les points d'intersection de cette tangente avec les axes ΩX et ΩY. Que peut-on dire des points A, B et M_0 ?

4. Soit λ un nombre réel donné, strictement positif.

a. Calculer l'aire S comprise entre la courbe (C), l'axe ΩX, et les droites d'équations $X = 1$ et $X = \lambda$.

b. Vers quelle limite tend le rapport $\dfrac{S}{\sqrt{\lambda}}$ quand λ tend vers l'infini ?

c. On considère le produit $P = \sqrt{\lambda}S$. On pose $\sqrt{\lambda} = \dfrac{1}{u}$.
Montrer que P tend vers zéro lorsque λ tend vers zéro (donc u vers $+\infty$).