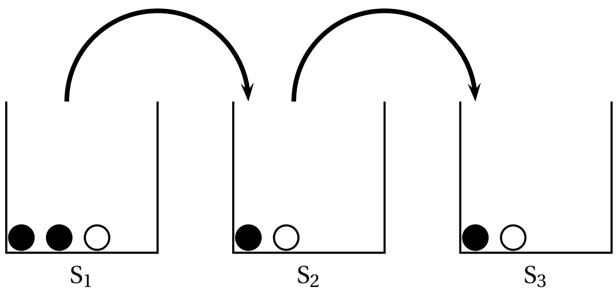
∾ Baccalauréat S Amérique du Nord ∾ juin 1996

EXERCICE 1 **4 points**

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On imagine n sacs de jetons S_1, $S_2, \ldots$, S_n.
Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc.
On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

– Première étape : on tire au hasard un jeton de S_1,
– Deuxième étape : on place ce jeton dans S_2 et on tire, au hasard, un jeton de S_2,
– Troisième étape : après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2 on tire, au hasard, un jeton de S_3 et ... ainsi de suite, ...



Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note E_k l'évènement : « le jeton sorti de S_k est blanc », et $\overline{E_k}$ l'évènement contraire.

1. **a.** Déterminer la probabilité de E_1 notée $p(E_1)$ et les probabilités conditionnelles : $p(E_2/E_1)$ et $p\left(E_2/\overline{E_1}\right)$.
En déduire la probabilité de E_2 notée $p(E_2)$.

b. Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité de E_k est notée p_k.
Justifier la relation de récurrence suivante :

$$p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}.$$

2. Étude d'une suite (u_k) :
On note (u_k) la suite définie par $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$, $u_{k+1} = \dfrac{1}{3} u_k + \dfrac{1}{3}$.

a. On considère la suite (v_k) définie par, pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$ par $v_k = u_k - \dfrac{1}{2}$.
Démontrer que (v_k) est une suite géométrique,

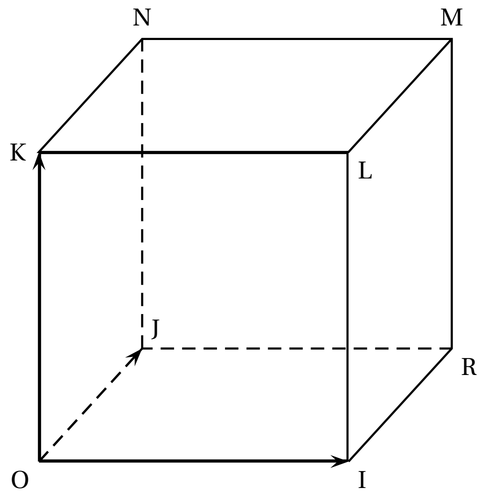
b. En déduire l'expression de u_k en fonction de k. Montrer que la suite (u_k) est convergente et préciser sa limite,

3. Dans cette question, on suppose que $n = 10$.
Déterminer pour quelles valeurs de k on a :

$$0{,}4999 \leqslant p_k \leqslant 0{,}5.$$

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

L'espace étant rapporté à un repère orthonormal de sens direct $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$, on considère le cube de sommets O, I, R, J, N, K, L, M dont une représentation est donnée ci-dessous



On note A le milieu de [IL] et B le point défini par :

$$\overrightarrow{KB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KN}.$$

On appelle $\mathbb{P}$ le plan passant les points O, A et B.

1. **a.** Préciser les coordonnées des points A et B.

   b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

2. **a.** En déduire que l'aire du triangle OAB vaut $\dfrac{\sqrt{14}}{6}$.

   b. Le point $C\left(1 ; \frac{1}{3} ; 1\right)$ appartient-il à $\mathbb{P}$? Justifier votre réponse.

3. On considère le tétraèdre OABK.

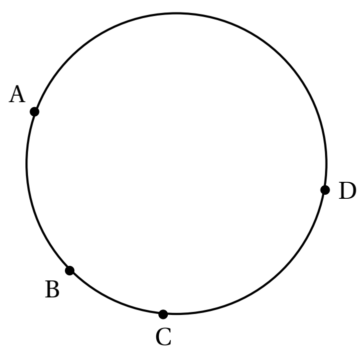
   a. Montrer que le volume vaut $\dfrac{1}{9}$.

   b. En déduire la distance du point K au plan $\mathbb{P}$.

   N. B. : on rappelle que le volume d'un tétraèdre est le tiers du produit de l'aire d'une base par la longueur de la hauteur correspondante.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère quatre points distincts A, B, C et D se succédant dans le sens trigonométrique sur un même cercle.



D'une manière générale, si M, N, P, Q sont quatre points tels M $\neq$ N et P $\neq$ Q, $\left(\overrightarrow{\text{MN}}, \overrightarrow{\text{PQ}}\right)$ désigne une mesure en radians de l'angle des vecteurs $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{MN}}, \overrightarrow{\text{PQ}}}\right)$.

1. Soit S la similitude plane directe de centre A qui transforme C en D. On désigne par E l'image du point B.
   a. Montrer que $\left(\overrightarrow{\text{CB}}, \overrightarrow{\text{DE}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) \quad \text{mod } 2\pi$.
   b. Montrer que E est sur la droite (BD). Marquer le point E sur la figure. On admettra que E est sur le segment [BD].
   c. Montrer que AD × BC = DE × AC.
2. **a.** Montrer que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{AE}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) \quad \text{mod } 2\pi$ puis que $\dfrac{\text{AD}}{\text{AE}} = \dfrac{\text{AC}}{\text{AB}}$.
   b. Soit S' la similitude directe de centre A qui transforme B en C. Montrer que D est l'image de E par cette similitude.
   c. Prouver que AB × CD = AC × BE.
3. Utiliser ce qui précède pour démontrer la relation :

$$\text{AC} \times \text{BD} = \text{AB} \times \text{CD} + \text{AD} \times \text{BC}.$$

Remarque : cette relation est connue sous le nom de théorème de Ptolémée. Ptolémée était un mathématicien et astronome grec du II$^{\text{e}}$ siècle après J.–C. : il utilisait cette relation pour calculer les longueurs des cordes d'arc de cercle, ancêtres de nos rapports trigonométriques.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \mathrm{e}^t$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).
   a. Tracer Γ ainsi que la tangente au point d'abscisse 0 après en avoir donné une équation sous la forme $y = \varphi_1(t)$. Par une observation graphique, comparer e^t et $t+1$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction :

$$h \quad : t \longmapsto \varphi(t) - \varphi_1(t).$$

   En déduire que pour tout élément t de $\mathbb{R}$ on a : $\mathrm{e}^t \geqslant t+1$.
   Préciser dans quel(s) cas on a l'égalité.
2. Déduire de ce qui précède que, pour tout élément t de $]-1\,;\,+\infty[$, on a : $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \dfrac{1}{t+1}$.
   Préciser dans quel(s) cas on a l'égalité.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) + \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f. Dresser le tableau de ces variations.
3. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 4 cm).
   a. Quelle est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 ?
   b. Construire $\mathscr{C}$ et cette tangente.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution notée α et que $-1 < \alpha < 0$.

   b. Compléter le tableau suivant :

x	$-0,95$	$-0,94$	$-0,93$	$-0,92$	$-0,91$	$-0,90$
$f(x)$						

   Remarque : Pour $f(x)$, on donnera une approximation décimale à 10^{-2} près.

   Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Partie C

Soit $J = \displaystyle\int_{\alpha}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$, où α est le réel défini dans la partie B, mais il n'est pas indispensable d'avoir traité les questions de la partie B pour traiter cette partie jusqu'au 5. a. inclus.

1. Interpréter graphiquement J.

   Sans chercher à calculer J, montrer géométriquement que $0 \leqslant J \leqslant -\alpha$.

2. **a.** Montrer que, pour tout $x > -1$,

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

   b. Calculer $\displaystyle\int_{\alpha}^{0} \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ en fonction de α.

3. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties :

   $\displaystyle\int_{\alpha}^{0} \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ en fonction de α.

4. **a.** Calculer l'intégrale J en fonction de α.

   b. En utilisant le fait que α est solution de $f(x) = 0$, montrer que $J = \alpha - 1 + \mathrm{e}^{-\alpha}(\alpha + 2)$.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x - 1 + \mathrm{e}^{-x}(x + 2).$$

   a. Calculer g'. Montrer que pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = \mathrm{e}^{-x}h(x)$, où h est la fonction définie dans la partie A.

   En déduire le signe de $g'(x)$ et le sens de variation de g.

   b. Utiliser en particulier l'encadrement d'amplitude 10^{-2} de α pour donner un encadrement de J puis une valeur approchée de J en indiquant la précision.

   Remarque : On indiquera sur la copie les résultats utilisés fournis par la calculatrice.