

Baccalauréat série S Amérique du Nord juin 2003

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions : chacune comporte trois réponses, une et une seule étant exacte.

Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la feuille jointe en annexe, page 5, en cochant pour chaque question la case correspondante à la réponse proposée.

Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse. Toute réponse exacte entraîne une bonification, toute erreur est pénalisée.

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0; t[$, notée $p([0; t[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t .

Cette loi est telle que $p([0; t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années (loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$).

1. Pour $t \geq 0$, la valeur exacte de $p([t; +\infty[)$ est :

a. $1 - e^{-\lambda t}$

b. $e^{-\lambda t}$

c. $1 + e^{-\lambda t}$

2. La valeur de t pour laquelle on a $p([0; t[) = p([t; +\infty[)$ est :

a. $\frac{\ln 2}{\lambda}$

b. $\frac{\lambda}{\ln 2}$

c. $\frac{\lambda}{2}$

3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors :

a. $\ln\left(\frac{50}{41}\right)$

b. $\ln\left(\frac{41}{50}\right)$

c. $\frac{\ln(82)}{\ln(100)}$

4. Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

a. $p([1; +\infty[)$

b. $p([3; +\infty[)$

c. $p([2; 3[)$

Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0,2$.

5. La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est :

a. 0,552 3

b. 0,548 8

c. 0,451 2

6. Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années.

La valeur la plus proche de la probabilité de l'évènement « $X = 4$ » est :

- a. 0,555 5 b. 0,802 2 c. 0,160 7

EXERCICE 2**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives

$$z_0 = 5 - 4i, \quad z_1 = -1 - 4i, \quad z_2 = -4 - i.$$

1. a. Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.
 b. Établir que l'écriture complexe de S est $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$.
 c. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S .
 d. On considère un point M , d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image M' , d'affixe z' .
 Vérifier la relation : $\omega - z' = i(z - z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.
2. Pour tout entier naturel n , le point A_{n+1} , est défini par $A_{n+1} = S(A_n)$ et on pose $u_n = A_n A_{n+1}$.
 a. Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6 .
 b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
 a. Exprimer v_n en fonction de n .
 b. La suite (v_n) est-elle convergente?
4. a. Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.
 b. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n : si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

EXERCICE 2**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$,
 $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

1. Placer ces points sur un dessin.
2. a. Vérifier que : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

- b. En déduire la nature du triangle ABC.
- c. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC.
Tracer le cercle Γ_1 .
- 3. a. Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2 . Préciser son rayon.
Construire Γ_2 .
- b. Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2 .
- 4. On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 - a. Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.
 - b. Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1 .
- 5. Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z , on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M' .
On posera : $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.
On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1 .
 - a. Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b .
 - b. Déterminer en fonction de a l'affixe du point $r(C)$, image du point C par la rotation r ; en déduire que le point $r(C)$ appartient à un cercle fixe que l'on définira.
Vérifier que ce cercle passe par C_1 .

PROBLÈME**10 points****Commun à tous les candidats****Partie A : étude d'une fonction f et construction de sa courbe**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. On rappelle que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- b. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^x)$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- c. En déduire que la courbe admet deux asymptotes que l'on précisera.
2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

- a. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- b. En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.

3. **a.** Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^x)$, f' désignant la fonction dérivée de f .
- b.** En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
4. Tracer les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe $\mathcal{C}'$.

Partie B : comportements asymptotiques d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Étudier le sens de variations de la fonction F .
2. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel t , $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ et calculer $\int_0^x \frac{1}{1+e^t} dt$.
- b.** En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$.
- c.** Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$(1) \quad F(x) = x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2.$$

$$(2) \quad F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2.$$

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [F(x) - x]$.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie C : étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{k=1}^n e^{-k} \ln(1+e^k).$$

1. Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est u_n .
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
3. **a.** Justifier que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

- b.** Comparer u_n et $F(n)$.
4. La suite (u_n) est-elle convergente?

Annexe à rendre avec la copie

Réponses à l'exercice 1 (mettre une croix dans la case correspondant à la réponse choisie)

	(a)	(b)	(c)
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			