Amérique du Nord juin 1967
Baccalauréat mathématiques

EXERCICE 1

Résoudre les équations

$$Z^2 = 1+\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \frac{(1+z)2}{(1-z)} = 1+\mathrm{i}.$$

Les solutions sont des nombres complexes, qu'on écrira sous la forme $a+\mathrm{i}b$, où a et b sont des nombres réels.

EXERCICE 2

Déterminer les couples d'entiers positifs x et y solutions de l'équation

$$4x-3y=5.$$

EXERCICE 3

1. **a.** Étudier les variations de la fonction définie par

   $$f(x) = 2x+5+\frac{4}{x-2}$$

   Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy), construire la courbe (C) qui a pour équation $y = f(x)$.

   b. Utiliser cette courbe pour discuter, suivant les valeurs du paramètre réel h, le nombre des racines réelles de l'équation

   $$2x^2+(1-h)x+2(h-3)=0.$$

2. La courbe (C) se compose de deux branches, dont l'une, (C_1), rencontre l'axe $x'x$ en deux points, A et B.

   a. Comment faut-il choisir le nombre réel h pour que la droite d'équation $y = h$ rencontre (C_1) en deux points, M et N ?
   h décrit alors un sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels, qu'on notera Δ.
   Calculer, en fonction de h, les coordonnées du milieu, I, du segment MN.
   Quel est l'ensemble décrit par I quand h décrit Δ ?

   b. Calculer, en fonction de h ($h \in \Delta$), la longueur du segment MN.
   Former l'équation du cercle (Γ) de diamètre MN.
   Montrer que cette équation peut s'écrire

   $$2x^2+x-6-h(x-2)+2(y-h)^2=0.$$

3. Pour $h \in \Delta_0$ ($\Delta_0 \subset \Delta$), le cercle (Γ) rencontre (C_1) en deux points, P et Q, distincts de M et N. On se propose de déterminer Δ_0.

   a. Montrer que l'ensemble des points communs à (C_1) et (Γ) est l'ensemble des points communs à (Γ) et à deux droites, dont l'une est la droite $y = h$ et dont l'autre a pour equation $y = -\dfrac{x}{2}+1+h$.
   On remarquera que l'équation de (C) peut se mettre sous la forme

   $$y(x-2) = 2x^2+x-6.$$

b. Utiliser ce résultat pour former l'équation aux abscisses des points P et Q.

En déduire Δ_0.

Pour quelle valeur de h les points P et Q sont-ils confondus en un point, P_0 ?

Calculer les coordonnées de P_0.

4. **a.** Calculer, en fonction de h ($h \in \Delta_0$), les coordonnées du milieu, J, du segment PQ.

Quel est l'ensemble décrit par J quand h décrit Δ_0 ?

b. Montrer que les droites qui ont pour équations

$$y = 2x + 5, \quad y = 4x + 1, \quad y = \frac{9x}{2}, \quad x = 2$$

forment deux couples de droites isogonales (couples de droites ayant les mêmes bissectrices).