Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1988

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Dans le plan $\mathscr{P}$ on considère le triangle équilatéral ABC.
On pose AB = BC = CA = a, $a > 0$.

1. Construire le point G barycentre du système (A, 2), (B, 1), (C, 1).
2. Déterminer et construire chacun des deux ensembles suivants :
   a. $\text{E}_1 = \left\{M \in \mathscr{P} / 2\text{MA}^2 + \text{MB}^2 + \text{MC}^2 = 2a^2\right\}$.
   b. $\text{E}_2 = \left\{M \in \mathscr{P} / 2\overrightarrow{\text{MA}}^2 + \overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MC}} = \dfrac{3a^2}{2}\right\}$.
   Pour ce dernier ensemble, on pourra utiliser le point G puis le milieu I du segment [AG].

EXERCICE 2 **6 POINTS**

Dans le plan P muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ un point M quelconque de coordonnées $(x\,;\,y)$ a pour affixe m, $m \in \mathbb{C}$; on note $|m|$ le module de m et $\overline{m}$ le conjugué de m.

1. On considère la courbe E dont une équation cartésienne dans P est :

$$x^2 + 5y^2 = 1.$$

   Déterminer la nature géométrique de E et ses éléments caractéristiques (centre, axes, sommets).
   Tracer E dans le plan P (unité : 6 cm).
2. Soit Ω l'application de P dans P qui, à tout point M d'affixe m, associe M$'$ d'affixe $\omega(m)$ définie par :

$$\omega(m) = |m| + \left(m - \overline{m}\right).$$

   On note E$'$ l'image de E par Ω.
   a. Calculer les coordonnées x' et y' de M$'$ en fonction de x et y, coordonnées de M.
   Calculer $|w(m)|^2$ en fonction de x et y, en déduire que E est l'ensemble des points M de P tels que $|\,w(m)| = 1$ et que E$'$ est contenue dans le cercle C de centre O et de rayon 1.
   b. Soit le point M$'$ de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$.
   Montrer que M$'$ admet un ou deux antécédents par Ω si et seulement si les coordonnées de M$'$ vérifient les deux relations : $x' \geqslant 0$ et $\left|y'\right| \leqslant 2x'$, caractériser géométriquement l'ensemble S' de ces points M$'$; en déduire que E$'$ est un arc du cercle C que l'on précisera .

PROBLÈME **10 POINTS**

Les objectifs de ce problème sont l'étude des variations d'une fonction g et la construction de sa courbe représentative Γ.

Partie A

1. Soit la fonction

$$f_1 : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1+\ln x. \end{array}$$

On note Λ la courbe représentative de la fonction définie dans $\mathbb{R}_+^*$ par : $x \longmapsto \ln x$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

a. Étudier les variations (sens de variations et limites aux bornes) de f_1 et déterminer le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs de x dans $\mathbb{R}_+^*$ (on montrera en particulier que f_1 s'annule en changeant de signe en un unique point x_0 de $\mathbb{R}_+^*$) ;

b. Soit Δ la droite d'équation cartésienne $x+y+1=0$; tracer Δ et Λ (unité de longueur : 2 cm) ; vérifier que x_0 (voir a.) est l'abscisse de l'unique point d'intersection de Δ et Λ.

2. Soit la fonction

$$f_2 : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x\ln x - x^2+1, \end{array}$$

étudier le sens de variations de f_2' et de f_2. (On ne demande pas l'étude du comportement de ces fonctions lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.)

Calculer $f_2(1)$ et en déduire le signe de $f_2(x)$ suivant les valeurs de x dans $\mathbb{R}_+^*$.

Partie B

Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(0) & = & 0 \quad \text{et} \\ g(x) & = & \dfrac{x\ln x}{x+1} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*. \end{array}\right.$$

On note Γ la courbe représentative de g dans le plan et D la tangente à Γ au point d'abscisse 1.

1. **a.** Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$; déterminer, si elle existe, la demi-tangente à Γ au point d'abscisse 0.

b. Étudier les variations de g, en utilisant A 1. a. ; vérifier que $g\left(x_0\right) = -x_0$.

2. Étudier les positions relatives de Λ et Γ. Soient M et M$'$ les deux points de Λ et Γ de même abscisse x ; quelle est la limite de $\overline{\text{M}'\text{M}}$ lorsque x tend vers $+\infty$? Interpréter géométriquement ce résultat.

3. En utilisant A 2., étudier la position relative de Γ par rapport à D.

4. Tracer D et Γ sur le graphique de A 1.