

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Sud ∞
novembre 1993

EXERCICE 1

5 points

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}.$$

On désigne par :

r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$

r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

et par D et E les points tels que : $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$.

1. Démontrer que $r_C \circ r_B \circ r_A$ est la symétrie centrale de centre B. Préciser alors la position du point E.
2. On désigne par s la similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ telle que : $s(A) = B$.
Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$.
En déduire que : $s(E) = D$.
3. Soit Q le centre de la similitude s .
Montrer que Q appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE.
Construire Q.
4.
 - a. Démontrer que s transforme la droite (AC) en (CB).
 - b. Démontrer que l'image par s du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD]. En déduire que l'image de C par la similitude s est le point I, milieu du segment [DE].

EXERCICE 2

4 points

Une urne contient $n + 8$ boules : huit boules blanches et n boules noires (n étant un entier au moins égal à deux).

Tous les tirages effectués sont supposés équiprobables.

On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. Pour chaque boule blanche tirée il gagne un franc, mais pour chaque noire il perd deux francs.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1. Dans cette question, un joueur effectue deux tirages : il tire une première boule de l'urne, il la remet dans l'urne puis il effectue un deuxième tirage.
 - a. Montrer qu'il peut, soit gagner deux francs, soit perdre un franc, soit perdre quatre francs.
 - b. Calculer, en fonction de n , la probabilité correspondant à chacun des cas.

- c. Calculer, en fonction de n , l'espérance mathématique de gain du joueur. Y a-t-il une valeur de n pour laquelle cette espérance est nulle ? Si oui, la donner.
2. Dans cette question, n est fixé égal à 6 (il y a donc 6 boules noires et 8 blanches dans l'urne). Le joueur tire trois boules simultanément.
- a. Montrer qu'il peut, soit gagner trois francs, soit perdre six francs, soit perdre trois francs, soit ne rien gagner ni ne rien perdre.
- b. Calculer la probabilité correspondant à chaque cas.

PROBLÈME**11 points****Partie A**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x).$$

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Pour l'étude de la limite en -1 , on remarquera que

$$f(x) = \frac{2x - (1+x)\ln(1+x)}{1+x}$$

2. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f .
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle $]1 ; +\infty[$ une solution unique notée α . Vérifier qu'une valeur décimale approchée de α à 10^{-1} près est 3,9.
4. Préciser, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} \quad \text{si } t > 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que g est continue sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Étudier la dérivabilité de g en 0.
2. Montrer que pour tout réel t strictement positif, on a :

$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} f(t).$$

3. a. Calculer la limite de g en $+\infty$. On remarquera que pour $t > 0$:

$$\ln(1+t) = \ln t + \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

b. Dresser le tableau des variations de g .

4. Le plan est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . On prendra pour unités : 1 cm sur l'axe (O, \vec{i}) et 10 cm sur l'axe (O, \vec{j}) . Construire la courbe (Γ) représentative de g .

Partie C

Cette partie a pour objectif de déterminer l'aire \mathcal{A} , en unités d'aire, du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation $x = 1$.

1. a. Démontrer que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$g_1(x) = \sqrt{x} \ln(1+x)$$

est dérivable en 0.

- b. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x} \ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt.$$

Montrer que φ est dérivable en tout point de l'intervalle $[0; +\infty[$ et que $\varphi'(x) = g(x)$.

2. En déduire que : $\mathcal{A} = 2 \ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$.

Calcul de l'intégrale $\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$$

et k la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[0; +\frac{\pi}{2}\right[$ par $k(\theta) = \tan^2 \theta$.

1. Calculer $(h \circ k)(0)$.
2. Prouver que, pour tout θ appartenant à I , $(h \circ k)'(\theta) = 4 \tan^2 \theta$.
3. En écrivant $\tan^2 \theta$ sous la forme $(\tan^2 \theta + 1) - 1$, déterminer une primitive de $(h \circ k)'$ puis donner l'expression de $(h \circ k)$.
4. Calculer $h(I)$.

Déduire des résultats précédents la valeur exacte de \mathcal{A} .