

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Sud ∞  
novembre 1993

EXERCICE 1

5 points

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}.$$

On désigne par :

$r_A$  la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$

$r_B$  la rotation de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{3}$

$r_C$  la rotation de centre C et d'angle  $\frac{\pi}{3}$

et par D et E les points tels que :  $r_B(A) = D$  et  $r_C(D) = E$ .

1. Démontrer que  $r_C \circ r_B \circ r_A$  est la symétrie centrale de centre B. Préciser alors la position du point E.
2. On désigne par  $s$  la similitude plane directe de rapport  $\frac{1}{2}$  d'angle  $-\frac{2\pi}{3}$  telle que :  $s(A) = B$ .  
Calculer le rapport  $\frac{BD}{AE}$  ainsi qu'une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$ .  
En déduire que :  $s(E) = D$ .
3. Soit Q le centre de la similitude  $s$ .  
Montrer que Q appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE.  
Construire Q.
4.
  - a. Démontrer que  $s$  transforme la droite (AC) en (CB).
  - b. Démontrer que l'image par  $s$  du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD]. En déduire que l'image de C par la similitude  $s$  est le point I, milieu du segment [DE].

EXERCICE 2

4 points

Une urne contient  $n + 8$  boules : huit boules blanches et  $n$  boules noires ( $n$  étant un entier au moins égal à deux).

Tous les tirages effectués sont supposés équiprobables.

On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. Pour chaque boule blanche tirée il gagne un franc, mais pour chaque noire il perd deux francs.

*Les questions 1 et 2 sont indépendantes*

1. Dans cette question, un joueur effectue deux tirages : il tire une première boule de l'urne, il la remet dans l'urne puis il effectue un deuxième tirage.
  - a. Montrer qu'il peut, soit gagner deux francs, soit perdre un franc, soit perdre quatre francs.
  - b. Calculer, en fonction de  $n$ , la probabilité correspondant à chacun des cas.

- c. Calculer, en fonction de  $n$ , l'espérance mathématique de gain du joueur. Y a-t-il une valeur de  $n$  pour laquelle cette espérance est nulle ? Si oui, la donner.
2. Dans cette question,  $n$  est fixé égal à 6 (il y a donc 6 boules noires et 8 blanches dans l'urne). Le joueur tire trois boules simultanément.
- a. Montrer qu'il peut, soit gagner trois francs, soit perdre six francs, soit perdre trois francs, soit ne rien gagner ni ne rien perdre.
- b. Calculer la probabilité correspondant à chaque cas.

**PROBLÈME****11 points****Partie A**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x).$$

1. Étudier les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. Pour l'étude de la limite en  $-1$ , on remarquera que

$$f(x) = \frac{2x - (1+x)\ln(1+x)}{1+x}$$

2. Étudier les variations de la fonction  $f$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .
3. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet, dans l'intervalle  $]1 ; +\infty[$  une solution unique notée  $\alpha$ . Vérifier qu'une valeur décimale approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près est 3,9.
4. Préciser, suivant les valeurs de  $x$ , le signe de  $f(x)$ .

**Partie B**

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} \quad \text{si } t > 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que  $g$  est continue sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ . Étudier la dérivabilité de  $g$  en 0.
2. Montrer que pour tout réel  $t$  strictement positif, on a :

$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} f(t).$$

3. a. Calculer la limite de  $g$  en  $+\infty$ . On remarquera que pour  $t > 0$  :

$$\ln(1+t) = \ln t + \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

b. Dresser le tableau des variations de  $g$ .

4. Le plan est rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On prendra pour unités : 1 cm sur l'axe  $(O, \vec{i})$  et 10 cm sur l'axe  $(O, \vec{j})$ . Construire la courbe  $(\Gamma)$  représentative de  $g$ .

**Partie C**

Cette partie a pour objectif de déterminer l'aire  $\mathcal{A}$ , en unités d'aire, du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe  $(\Gamma)$  et la droite d'équation  $x = 1$ .

1. a. Démontrer que la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$g_1(x) = \sqrt{x} \ln(1+x)$$

est dérivable en 0.

- b. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x} \ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt.$$

Montrer que  $\varphi$  est dérivable en tout point de l'intervalle  $[0; +\infty[$  et que  $\varphi'(x) = g(x)$ .

2. En déduire que :  $\mathcal{A} = 2 \ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$ .

Calcul de l'intégrale  $\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

Soit  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par

$$h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$$

et  $k$  la fonction définie sur l'intervalle  $I = \left[0; +\frac{\pi}{2}\right[$  par  $k(\theta) = \tan^2 \theta$ .

1. Calculer  $(h \circ k)(0)$ .
2. Prouver que, pour tout  $\theta$  appartenant à  $I$ ,  $(h \circ k)'(\theta) = 4 \tan^2 \theta$ .
3. En écrivant  $\tan^2 \theta$  sous la forme  $(\tan^2 \theta + 1) - 1$ , déterminer une primitive de  $(h \circ k)'$  puis donner l'expression de  $(h \circ k)$ .
4. Calculer  $h(I)$ .

Déduire des résultats précédents la valeur exacte de  $\mathcal{A}$ .