Durée : 4 heures

Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1994

EXERCICE 1 **points**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs, telle que $u_0 = 5$ et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.

2. On se propose, dans cette question, d'étudier de deux manières la convergence de cette suite.

Partie A - Première méthode :

a. Montrer que la suite est décroissante.

b. Déduire de ce qui précède que la suite est convergente, puis trouver sa limite.

Partie B - Deuxième méthode :

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 4 \leqslant \dfrac{1}{4}(u_n - 4)$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n - 4 \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

c. En déduire que la suite converge et trouver sa limite.

EXERCICE 2 **points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est 4 cm.
À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = -\frac{1}{\overline{z}},$$

où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1. a. Déterminer une relation entre les arguments de z et de z'.

b. En déduire que les points O, M et M' sont alignés.

2. Démontrer que $\overline{z' + 1} = \dfrac{1}{z}(z - 1)$.

On nomme A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre A contenant le point O et par $\mathscr{P}^{\star}$ le cercle $\mathscr{P}$ privé du point O.

3. On suppose dans cette question que le point M appartient à $\mathscr{P}^{\star}$.

a. Justifier l'égalité : $|z - 1| = 1$.

Démontrer que $\left|z' + 1\right| = \left|z'\right|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

b. Déduire de ce qui précède une construction géométrique du point M' à partir du point M.

4. Le point M étant un point du plan, d'affixe z non réelle, on nomme M_1 son symétrique par rapport à l'axe des réels.

   a. Calculer $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de $\overline{z}$.

   Exprimer alors l'argument de $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{M_1\text{A}}\,,\ \overrightarrow{M_1\text{B}}\right)$.

   b. Comparer les angles $\left(\overrightarrow{M_1\text{A}}\,,\ \overrightarrow{M_1\text{B}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{M\text{A}}\,,\ \overrightarrow{M\text{B}}\right)$.

   c. Démontrer que M' appartient au cercle circonscrit au triangle AMB.

PROBLÈME **points**

Question préliminaire :

On admet que, pour tout nombre réel x strictement positif : $\text{e}^x \geqslant x+1$ et $\ln x \leqslant x-1$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

En déduire que, pour tout x strictement positif,

$$\text{e}^x - \ln x \geqslant 2. \qquad (1)$$

Partie A - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & \dfrac{x}{\text{e}^x - \ln x} & \text{si } x > 0\\ f(0) & = & 0. & \end{array}\right.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; (unité graphique : 4 cm).

1. Montrer que f est continue en 0.
   Étudier la dérivabilité de f en 0.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. $\left(\text{On pourra écrire } f(x) = \dfrac{1}{\frac{\text{e}^x}{x} - \frac{\ln x}{x}}\right)$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
3. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

   $$g(x) = \text{e}^x - \ln x - x\text{e}^x + 1.$$

   a. Déterminer la limite de g en 0.
   Déterminer la limite de g en $+\infty$ (on pourra mettre e^x en facteur dans l'expression de $g(x)$.
   Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

   b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. Justifier l'encadrement : $1,23 \leqslant \alpha \leqslant 1,24 \qquad (2)$.

   c. Étudier le signe de $g(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. **a.** Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

   b. Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\text{e}^\alpha - \frac{1}{\alpha}}$.
   En utilisant l'encadrement (2) du réel α, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$. En déduire que $0,38$ est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et préciser ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et α.

Partie B - Étude d'une suite définie par une intégrale

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_n = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(*On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.*)

1. Interpréter géométriquement u_n.

2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3. Soit cp la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^x - x\ln x - \ln x.$$

Calculer $\varphi'(x)$. En utilisant l'inégalité (1) de la partie préliminaire, démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $\varphi'(x) \geqslant 0$.
En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $\varphi(x) \geqslant 0$.

4. **a.** En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) - \dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x} \leqslant 0$.

b. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant x\mathrm{e}^{-x}$.

c. En effectuant une intégration par parties, calculer, en fonction de l'entier naturel non nul n, les deux intégrales suivantes :

$$\int_1^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_1^n (1+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

5. **a.** Montrer que la suite (u_n) est majorée.

b. Montrer que la suite (u_n) converge.
On appelle ℓ sa limite.

c. Démontrer que $\dfrac{2}{\mathrm{e}} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{3}{\mathrm{e}}$.