Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 1995

EXERCICE 1 **4 points**

On tire trois boules simultanément et au hasard d'une urne contenant trois boules blanches, trois noires, trois vertes et trois rouges. On suppose l'équiprobabilité des tirages.
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. X est la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules blanches obtenues.

   Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Pour gagner il faut tirer au moins deux boules blanches, mais on estime qu'un joueur sur dix est un tricheur et qu'un tricheur gagne avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.

   On note :

   T l'évènement « être un tricheur »,

   $\overline{T}$ l'évènement contraire de T,

   G l'évènement « gagner au jeu ».

   a. Calculer la probabilité de l'évènement « gagner pour un non tricheur » c'est-à-dire $p_{\overline{T}}(G)$.

   En déduire la probabilité de l'évènement $G \cap \overline{T}$.

   b. Calculer $p(T \cap G)$.

   c. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est $\frac{181}{1\,100}$.

   d. Calculer la probabilité qu'une personne qui a gagné soit un tricheur.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} x^2 (\ln x)^n \,\mathrm{d}x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien et :

$$I_0 = \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0.
2. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.
3. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

   $$3I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}^3.$$

   En déduire I_2.
4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, I_n est positive.

   b. Déduire de l'égalité (1) que, pour tout entier naturel n non nul,

   $I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^3}{n+1}$.

   c. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1,5 cm).
f est l'application du plan P, privé du point O, dans P qui à tout point M d'affixe $z\,(z \neq 0)$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z^2-4}{2z}.$$

1. **a.** Démontrer que, si $z \neq 2\text{i}$ on a :

$$\frac{z'+2\text{i}}{z'-2\text{i}} = \left(\frac{z+2\text{i}}{z-2\text{i}}\right)^2.$$

   b. On désigne par A et B les points d'affixes respectives 2i et (-2i). Justifier que :

$$\left(\overrightarrow{M'\text{A}}, \overrightarrow{M'\text{B}}\right) = 2\left(\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{B}}\right) \quad (2\pi)$$

   puis que

$$\frac{M'\text{B}}{M'\text{A}} = \left(\frac{M\text{B}}{M\text{A}}\right)^2.$$

2. Soit I le point d'affixe $z_{\text{I}} = -4+2\text{i}$.

   a. Déterminer $\left(\overrightarrow{\text{IA}}, \overrightarrow{\text{IB}}\right)$ et $\dfrac{\text{IA}}{\text{IB}}$.

   b. Déterminer et construire l'ensemble E défini par :

$$\text{E} = \left\{M / M \in P \text{ et } \frac{M\text{AB}}{M\text{A}} = 2\right\}.$$

   c. En utilisant les questions précédentes, construire le point l'image de I par f.

PROBLÈME **11 points**

Objectif du problème : Résolution d'une équation différentielle et étude d'une de ses solutions.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 2\text{e}^{-x}. \qquad \text{(E)}$$

1. Déterminer le réel λ tel que la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = \lambda x^2\text{e}^{-x}$ soit solution de l'équation (E).
2. Démontrer que y, fonction numérique deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si et seulement si la fonction z définie par $z = y - y_0$ est solution de l'équation différentielle (E) :

$$z'' + 2z' + z = 0.$$

3. Résoudre l'équation différentielle (E_1).
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

5. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ passe par le point de coordonnées $(-1 ; 0)$ et admet en ce point une tangente de vecteur directeur $\vec{\imath}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)^2\text{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
   c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations,
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse O.
3. On se propose dans cette question d'étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à (T).
   a. On pose $k(x) = x+1-\text{e}^x$.
   Calculer $k'(x)$; en déduire le sens de variation de k et son signe.
   b. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à (T).
4. Après avoir reproduit et complété le tableau de valeurs ci–dessous, tracer (T) et $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

x	-2	$-0,5$	$-0,25$	0,5	1	2	3	4	6
$f(x)$									

   Les valeurs de $f(x)$ seront données à 10^{-2} près.
5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 4\int_n^{n+1} f(t)\,\text{d}t.$$

   a. Représenter u_3 sur le graphique précédent.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$4f(n+1) \leqslant u_n \leqslant 4f(n).$$

   En déduire le sens de variation de (u_n).
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).