

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Sud ∞
novembre 1994

EXERCICE 1

points

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs, telle que $u_0 = 5$ et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 4$.
2. On se propose, dans cette question, d'étudier de deux manières la convergence de cette suite.

Partie A - Première méthode :

- a. Montrer que la suite est décroissante.
- b. Dédire de ce qui précède que la suite est convergente, puis trouver sa limite.

Partie B - Deuxième méthode :

- a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{4}(u_n - 4)$.
- b. Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n - 4 \leq \frac{1}{4^n}$.
- c. En déduire que la suite converge et trouver sa limite.

EXERCICE 2

points

Le plan complexe \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = -\frac{1}{\bar{z}},$$

où \bar{z} désigne le nombre complexe conjugué de z .

1.
 - a. Déterminer une relation entre les arguments de z et de z' .
 - b. En déduire que les points O , M et M' sont alignés.
2. Démontrer que $\overline{z' + 1} = \frac{1}{z}(z - 1)$.
On nomme A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 .
On désigne par \mathcal{C} le cercle de centre A contenant le point O et par \mathcal{P}^* le cercle \mathcal{P} privé du point O .
3. On suppose dans cette question que le point M appartient à \mathcal{P}^* .
 - a. Justifier l'égalité : $|z - 1| = 1$.
Démontrer que $|z' + 1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.
 - b. Dédire de ce qui précède une construction géométrique du point M' à partir du point M .

4. Le point M étant un point du plan, d'affixe z non réelle, on nomme M_1 son symétrique par rapport à l'axe des réels.
- Calculer $\frac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de \bar{z} .
Exprimer alors l'argument de $\frac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B})$.
 - Comparer les angles $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B})$ et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.
 - Démontrer que M' appartient au cercle circonscrit au triangle AMB .

PROBLÈME**points****Question préliminaire :**

On admet que, pour tout nombre réel x strictement positif : $e^x \geq x + 1$ et $\ln x \leq x - 1$ où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

En déduire que, pour tout x strictement positif,

$$e^x - \ln x \geq 2. \quad (1)$$

Partie A - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

On désigne par \mathcal{C} la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$; (unité graphique : 4 cm).

- Montrer que f est continue en 0.
Étudier la dérivabilité de f en 0.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On pourra écrire $f(x) = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}}$).
Interpréter graphiquement ce résultat.
- On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^x - \ln x - xe^x + 1.$$

- Déterminer la limite de g en 0.
Déterminer la limite de g en $+\infty$ (on pourra mettre e^x en facteur dans l'expression de $g(x)$).
Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
 - Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α . Justifier l'encadrement : $1,23 \leq \alpha \leq 1,24$ (2).
 - Étudier le signe de $g(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
 - Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1}{e^\alpha - \frac{1}{\alpha}}$.
En utilisant l'encadrement (2) du réel α , déterminer un encadrement de $f(\alpha)$. En déduire que 0,38 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

5. Tracer la courbe \mathcal{C} et préciser ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et α .

Partie B - Étude d'une suite définie par une intégrale

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \geq 1, u_n = \int_1^n f(x) dx.$$

(On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.)

1. Interpréter géométriquement u_n .
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = e^x - x \ln x - \ln x.$$

Calculer $\varphi'(x)$. En utilisant l'inégalité (1) de la partie préliminaire, démontrer que, pour tout réel $x \geq 1$, $\varphi'(x) \geq 0$.

En déduire que, pour tout réel $x \geq 1$, $\varphi(x) \geq 0$.

4. a. En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout réel $x \geq 1$,

$$f(x) - \frac{1+x}{e^x} \leq 0.$$

- b. Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $f(x) \geq xe^{-x}$.

- c. En effectuant une intégration par parties, calculer, en fonction de l'entier naturel non nul n , les deux intégrales suivantes :

$$\int_1^n xe^{-x} dx \quad \text{et} \quad \int_1^n (1+x)e^{-x} dx.$$

5. a. Montrer que la suite (u_n) est majorée.
- b. Montrer que la suite (u_n) converge.

On appelle ℓ sa limite.

- c. Démontrer que $\frac{2}{e} \leq \ell \leq \frac{3}{e}$.