Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 1999

EXERCICE 1 **4 points**

L'étude de l'évolution de la population de deux villes d'une région entre 1978 et 1998 a été réalisée de deux façons différentes.
Les populations sont exprimées en milliers d'habitants et n désigne un entier naturel.

1. La 1re étude a établi que, pour chacune de ces villes, le nombre d'habitants exprimé en milliers pour l'année $(1978+n)$ est donné par les relations suivantes :

   ville A : $u_n = \text{e}^{0,1n}$

   ville B : $v_n = 4\text{e}^{-0,1n}$

   Déterminer l'année au cours de laquelle les villes A et B auront le même nombre d'habitants.
2. La 2e étude a établi que le nombre d'habitants de la ville A a augmenté de 10,5 % par an entre 1978 et 1998.

   On note P_0 la population de la ville A en 1978 et P_n sa population en $(1978+n)$. On suppose que $P_0 = 1$.

   a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et montrer que P_n est une suite géométrique de raison 1,105.

   b. Exprimer P_n en fonction de n.

   c. En utilisant u_n et P_n obtient-on à 20 individus près les mêmes résultats pour la population de la ville A en 1980 ? en 1995 ?

EXERCICE 2 **4 points**

Claude, élève en terminale littéraire, va passer l'épreuve d'enseignement scientifique.
Il sait que chacune des trois matières, mathématiques, sciences physiques et sciences de la vie et de la terre, a la même probabilité d'être tirée au sort comme épreuve du bac.
Claude a remarqué au cours de l'année qu'il obtenait la moyenne 4 fois sur 5 en mathématiques et 2 fois sur 3 dans chacune des 2 autres matières.
Soit : E l'évènement « Claude obtient la moyenne en enseignement scientifique » ;
M l'évènement « l'interrogation de l'enseignement scientifique porte sur les mathématiques » ;
P l'évènement « l'interrogation de l'enseignement scientifique porte sur les sciences physiques » ;
S l'évènement « l'interrogation de l'enseignement scientifique porte sur les sciences de la vie et de la terre ».
Soit X un évènement, on note $p(X)$ la probabilité qu'il soit réalisé.

1. Exprimer avec les notations ci-dessus l'évènement « Claude obtient la moyenne en enseignement scientifique en étant interrogé en mathématiques ».

   Calculer la probabilité de cet évènement.

   Le résultat sera donné sous forme de fraction.
2. Calculer $p(E \cap P)$ et $p(E \cap S)$, en déduire la probabilité que Claude ait la moyenne en enseignement scientifique.

   Les résultats seront donnés sous forme de fraction.
3. Cinq élèves de sa classe évaluent de la même façon leurs chances d'obtenir ou non la moyenne dans cette épreuve selon la matière tirée au sort.

   Quelle est la probabilité que les cinq élèves obtiennent la moyenne ?

   On donnera une valeur arrondie au centième.

PROBLÈME **12 points**

Partie A - Étude d'une fonction homographique

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]2~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-2}.$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x-2}$.
2. Étudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
3. On note f' la fonction dérivée de f.
   Calculer $f'(x)$, étudier son signe suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de la fonction f.

Partie B - Représentation d'une fonction exponentielle

ln désigne le logarithme népérien.
Soit h la fonction définie sur $]\ln 2~;~+\infty]$ par :

$$h(x) = \frac{3\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-2}.$$

$\mathcal{C}_h$ est la courbe représentative de h dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. (unité graphique : 1 cm).

1. Déterminer la limite de h en $\ln 2$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer la limite de h en $+\infty$ et montrer que la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$.
   Préciser la position de $\mathcal{C}_h$ par rapport à cette droite.
3. On note h' la fonction dérivée de h.
   Calculer $h'(x)$, étudier son signe suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de la fonction h.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$ dans le repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ ainsi que ses asymptotes.

Partie C - Calcul d'aire

1. H est la fonction définie par

   $$H(x) = c\ln\left(\mathrm{e}^x-2\right) + dx.$$

   Déterminer les réels c et d tels que H soit une primitive de h sur $]\ln 2~;~+\infty]$.
2. Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_h$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \ln 3$ et $x = \ln 5$.