Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 1999

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un appareil électronique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs0 ou 1 (par exemple : 1011).

1. **a.** Combien l'appareil peut-il fabriquer de codes distincts ?

On supposera dans ce qui suit que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.

   b. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de 1 figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. Une imprimante a été choisie au hasard dans une série.

   À la suite d'études antérieures, on a observé cinq cas possibles. Dans le cas E_0, l'imprimante n'écrit que des 0, quel que soit le code émis par l'appareil. Pour chaque élément n de l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3\}$, dans le cas E_n l'imprimante écrit correctement les n premiers caractères du code et n'écrit ensuite que des 0.

   Par exemple, lorsque E_2 survient, tous les codes commençant par 01 sont imprimés 0100. Dans le cas E_4, l'imprimante fonctionne correctement.

   L'état de l'imprimante sera donc considéré comme le résultat d'une épreuve aléatoire ayant cinq issues possibles $E_0,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4$. On admet que, pour chaque élément n de l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $P(E_n) = 32 \times 10^{-3}$. Le code émis par l'appareil est indépendant de l'état de l'imprimante.

   a. Calculer la probabilité $P(E_4)$. Pour la suite, C désigne l'évènement : « le code imprimé est identique à celui émis par l'appareil ».

   b. On suppose que E_0 se produit. Quelle est la probabilité $P(C/E_0)$ que le code imprimé soit quand même celui que l'appareil a envoyé ?
   En déduire la probabilité $P(C \cap E_0)$.

   c. Déterminer de même $P(C/E_n)$ puis $P(C \cap E_n)$ pour tout élément n de l'ensemble $\{1,\ 2, 3, 4\}$. En déduire $P(C)$.

   d. Si le code imprimé est exactement celui émis par l'appareil, quelle est la probabilité que E_2 se soit produit ?

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\,\mathrm{d}x$ et, pour tout nombre n entier naturel non nul,
$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x\,\mathrm{d}x$.

1. **a.** Calculer I_0.

   b. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.

2. **a.** En effectuant deux intégrations par parties successives, déterminer, lorsque $n \geqslant 1,\ I_{n+2}$ en fonction de I_n.

   b. Vérifier que $I_3 = \dfrac{\pi^2}{108} - \dfrac{2}{27}$.

3. Sans calculer l'intégrale I_n,

a. montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone ;

b. pour tout nombre n entier naturel non nul, comparer I_n à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n\,\mathrm{d}x$.

c. déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

On considère l'équation

$$(1) \qquad : \quad 20b - 9c = 2.$$

où les inconnues b et c appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

1. **a.** Montrer que si le couple $(b_0$; c_0 d'entiers relatifs est une solution de l'équation (1), alors c_0 est un multiple de 2.

   b. On désigne par d le p.g.c.d. de $|b_0|$ et $|c_0|$. Quelles sont les valeurs possibles de d ?

2. Déterminer une solution particulière de l'équation (1), puis déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.
3. Déterminer l'ensemble des solutions $(b$; $c)$ de (1) telles que p.g.c.d.$(b$; $c) = 2$.
4. Soit r un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. Le nombre entier naturel P, déterminé par $P = \alpha_n r^n + \alpha_{n-1} r^{n-1} + ... + \alpha_1 r + \alpha_0$, où α_n, α_{n-1}, ..., α_1, α_0 sont des nombres entiers naturels vérifiant $0 < \alpha_n < r$, $0 \leqslant \alpha_{n-1} < r$,..., $0 \leqslant$, $\alpha_0 < r$ est noté $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0}^{(r)}$; cette écriture est dite « écriture de P en base r ». Soit P un nombre entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ et $\overline{bbaa}^{(4)}$ (en base six et en base quatre respectivement).

   Montrer que $a + 5$ est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de a, puis de b et de c.

   Donner l'écriture de P dans le système décimal.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0$; $+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + x - \frac{1 + \ln x}{x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On considère la fonction auxiliaire φ définie sur $]0$; $+\infty[$ par :

   $$\varphi(x) = 2x^3 + x^2 + \ln x.$$

   a. Étudier le sens de variations de φ.

   b. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution unique qu'on appellera α. Trouver le nombre entier naturel p tel que :

   $$p \times 10^{-2} \leqslant \alpha < (p+1) \times 10^{-2}.$$

c. En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathscr{C}$?

c. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

d. Soit la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + x.$$

On appelle Γ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Préciser les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

e. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0,2	0,4	2	2,5
$f(x)$									

Les valeurs de $f(x)$ seront données à 10^{-2} près.

f. Tracer $\mathscr{C}$ et Γ.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Unité graphique : 4 cm. À tout point M d'affixe non nulle z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = z^2 + z - \frac{1 + \ln|z|}{z}.$$

On dit que M' est l'image de M.

1. On considère les points P et Q d'affixes respectives $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ et i.
Calculer les affixes des images P$'$ et Q$'$ de ces points. Placer P, Q, P$'$ et Q$'$.

2. **a.** Δ est la demi-droite constituée des points d'affixe réelle strictement positive. Soit M un point de Δ, d'affixe x. Quelle est l'affixe de son image M' ?

b. En utilisant le tableau des variations de la fonction f, indiquer la valeur de x pour laquelle l'abscisse de M' est minimum.

c. Définir et représenter l'ensemble Δ' des points M' lorsque M décrit la demi-droite Δ.

3. Le point M décrit maintenant le cercle E de centre O et de rayon 1.
On note θ un argument de z, θ décrivant $[-\pi\ ;\ \pi]$.

a. Montrer qu'une représentation paramétrique de l'ensemble E$'$ des points M est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(\theta) & = & \cos 2\theta \\ y(\theta) & = & \sin 2\theta + 2\sin\theta \end{array}\right.$$

b. Que peut-on dire des points E$'$ de paramètres respectifs θ et $-\theta$?
En déduire qu'il suffit de construire la partie E$'$ correspondant à l'ensemble $[0\ ;\ \pi]$ des valeurs de θ (partie qu'on désignera par E$'_1$ pour obtenir E$'$.

c. Étudier conjointement les variations sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ des fonctions x et y.

d. Préciser les points d'intersection de E'_1 avec chacun des axes de coordonnées.

e. Déterminer les points où E'_1 admet une tangente parallèle à l'un des axes de coordonnées. On admet qu'au point correspondant à la valeur π du paramètre, E'_1 admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

f. Tracer E' en utilisant avec précision les éléments obtenus précédemment.