Baccalauréat Amérique du Sud novembre 1967

SÉRIE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Exercice 1

Quelle est la limite, quand x tend vers l'infini, de l'expression

$$\frac{1}{x}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)?$$

Exercice 2

Déterminer les couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels qui admettent 15 pour P. G. C. D. et 360 pour P. P. C. M.

Exercice 3

Dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $x'\mathrm{O}x$, $y'Oy$, on désigne par E l'ensemble complémentaire de la droite d'équation $x = -1$ dans (P). On donne le point $\mathrm{A}(-1\,;\,0)$ et un point M quelconque, qui se projette en I sur $x'x$ et en J sur $y'y$. Soit M_1 l'intersection de IM et $\mathrm{A}J$.
On désigne par (T) la transformation ponctuelle qui, à M, fait correspondre M_1.

1. Déterminer les coordonnées, X et Y, de M_1 en fonction des coordonnées, x et y, de M.
Démontrer que, sur E, la transformation (T) est biunivoque.
Écrire les formules définissant la transformation réciproque de (T).
Quel est l'ensemble des points doubles ?

2. Le point M étant donné, soit M_1 son transformé par (T), M_2 le transformé de M_1 par (T), M_3 le transformé de M_2 par (T), ..., M_n le transformé de M_{n-1} par (T).
Montrer que les cordonnées des points $M, M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont en progression géométrique.
Déterminer la somme, S_n des termes de cette progression.
En déduire l'ensemble, E_1, inclus dans E, des points M tels que S_n ait une limite finie quand n tend vers l'infini. Quelle est la valeur de cette limite ?

3. Montrer que l'ensemble des droites parallèles à $x'\mathrm{O}x$ est transformé par (T) en un ensemble de droites passant par un point fixe.
Quelle est la transformée d'une droite quelconque passant par O et distincte de $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$?

4. Soit (C_1) et (C_2) les courbes d'équations

$$y_1 = \frac{x+4}{x} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{x+5}{x+1}$$

et soit $\left(C'_1\right)$ et $\left(C'_2\right)$ leurs transformées par (T).
Représenter ces quatre courbes sur un même graphique.
On désigne par $\mathscr{A}_1$ l'aire de la surface limitée par (C_1), (C_2) et les droites $x = 2$ et $x = \lambda > 2$ et par $\mathscr{A}'_1$ l'aire de la surface limitée par $\left(C'_1\right)$, $\left(C'_2\right)$ et les droites $x = 2$ et $x = \lambda$.
Déterminer λ pour que $\mathscr{A}'_1 - \mathscr{A}_1 = \lambda$.