Baccalauréat Amérique du Sud mars 1968

SÉRIE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Exercice 1

On considère le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ et Z2 l'on forme

$$Z = \frac{z^2}{1 - z}$$

1. Calculer la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.
   m étant le point image de z, quel est l'ensemble des points m pour lesquels Z est réel ?
2. On désigne le module de z par r, son argument par θ.
   Quels sont le module et l'argument de $\frac{1}{z^2}$ et de $\frac{1}{z}$?
   Exprimer Z en fonction de r et θ.
   En déduire l'ensemble des points m pour lesquels $\frac{1}{Z}$ est réel.

Exercice 2

Résoudre l'équation

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2.$$

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O.
(C) est le cercle de centre O et de rayon R.

1. Étant donné un point $M\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ extérieur à (C), on appelle (C_M) le cercle de centre M orthogonal à (C). Indiquer une construction géométrique de (C_M).
   Calculer la puissance de M par rapport au cercle (C) en fonction de x_0, y_0 et R.
   Écrire l'équation du cercle (CM)'
2. Soit (D) la polaire d'un point $P\left(x_1\ ;\ y_1\right)$ par rapport à (C_M).
   Indiquer une construction géométrique de (D).
   Montrer que l'équation de (D) est

$$(x_1 - x_0)\,x + \left(y_1 - y_0\right) y - x_0 x_1 - y_0 y_1 + R^2 = 0.$$

3. On suppose que (D) a pour équation $y = R$.
   Étant donné un point $P\left(x_1\ ;\ y_1\right)$, existe-t-il un point $M\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ tel que (D) soit la polaire de P par rapport à (C_M) ?
   Donner une solution géométrique, dont on retrouvera le résultat en utilisant l'équation proposée au 2.
4. (D) est définie comme au 3. ; P décrit la droite $y = x + 2R$. Trouver l'équation de l'ensemble, (Γ), des points M tels que (D) soit la polaire de P par rapport à (C_M). Représenter graphiquement (Γ).
   Cette courbe coupe Ox en deux points, d'abscisses x' et x'' $(x'' > 0)$.
   Calculer l'aire limitée par (Γ), l'axe des x et les points d'abscisses x' et x''.
   On calculera, au préalable, la dérivée de $\text{Log}\,|x + k|$, k étant une constante.