∽ Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1981 ∾

EXERCICE 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 4(3+2\mathrm{i})z + 3(5+12\mathrm{i}) = 0.$$

   On notera z_A la racine ayant le plus petit module et z_B l'autre.
   Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$2z^2 - (6+19\mathrm{i})z - 35 + 15\mathrm{i} = 0.$$

   On notera z_C la racine imaginaire pure et z_D l'autre.
2. Si A, B, C et D sont les images respectives de z_A, z_B, z_C et z_D dans le plan complexe, montrer qu'il existe une similitude plane inverse s telle que $s(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$ et $s(\mathrm{B}) = \mathrm{D}$. En donner les éléments caractéristiques.

EXERCICE 2

Trois entiers naturels a, b, c s'écrivent dans un système de base inconnue n, respectivement 7, 238, 1 541.

1. Déterminer n pour que $c = ab$, sachant que n est premier.
2. Écrire les nombres dans le système décimal.
   Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $ax + by = 1$.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right) \end{array}$$

1. Étudier cette fonction.
   Construire soigneusement sa courbe représentative (H) dans un repère orthonormé. (Unité : 2 cm sur chaque axe.)
2. x_0 étant un réel strictement positif, calculer l'aire de la surface limitée par la droite d'équation $x = 2$, la droite d'équation $x = x_0$, la courbe (H) et son asymptote oblique.
   Cette aire admet-elle une limite quand x_0 tend vers 0, vers $+\infty$?
3. Montrer que f définit une bijection de $]0\,;2]$ sur $[2\,;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque g.
4. Construire la courbe représentative de g dans le même repère que la courbe (H) et en déduire

$$\int_2^4 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partie A

On considère le mouvement plan défini dans le repère ci-dessus par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t\\ y &=& 2^{t-1}+2^{1-t}, \quad t \geqslant 0\end{array}\right.$$

1. Déterminer la trajectoire.
2. Donner les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération.
3. Déterminer la position initiale du mobile (c'est-à-dire à l'instant $t = 0$), son vecteur vitesse initiale et son vecteur accélération initiale.
4. Indiquer sur quelle partie de la trajectoire le mouvement est accéléré, retardé.

Partie C

1. Montrer que la courbe (H), rapportée à ses asymptotes, a une équation de la forme $XY = k$.
   En déduire les équations, dans le repère initial, des axes de symétrie de la courbe (H). Vérifier qu'ils sont orthogonaux.
2. La courbe (H) étant rapportée à ses axes de symétrie, en déterminer une équation.

Partie D

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right).$$

si $n \geqslant 1$ et de premier terme $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

1. Montrer que tous les termes de la suite sont bien définis et strictement positifs.
2. On pose $v_n = \dfrac{-2+u_n}{2+u_n}$ pour tout n supérieur ou égal à 1.
   Calculer v_n en fonction de v_{n-1} puis de v_1.
   En déduire la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$ puis celle de u_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Redessiner la branche de la courbe (H) correspondant à $x > 0$ et la droite d'équation $y = x$.
   Placer les points $M_1(u_1,\ u_2)$, $M_2(u_2,\ u_3)$ et $M_3(u_3,\ u_4)$.
4. D'une manière plus générale on considère la suite définie par

   $$w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(w_n + \frac{a^2}{w_n}\right).$$

   avec a strictement positif et $w_1 \geqslant a$.
   Montrer par récurrence que $w_n \leqslant w_{n-1}$ et $a \leqslant w_n$.
   Établir la convergence de la suite w_n et calculer sa limite.

N.B. - Les parties A, C et D sont indépendantes les unes des autres.