Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1984

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives -1, -2, et z, où z représente un nombre complexe différent de -1 et de -2.
Posons $Z = \dfrac{z+2}{z+1}$;
$|Z|$ désigne le module de Z et arg Z désigne la mesure de l'argument de Z appartenant à $[-\pi~;\pi[$.

1. Justifier que $|Z| = \dfrac{\text{BM}}{\text{AM}}$ et que arg Z est une mesure, en radians de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{MA}},~\overrightarrow{\text{MB}}}\right)$ en utilisant la définition et les propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe.
2. Utiliser le rappel ci-dessus pour déterminer géométriquement les ensembles suivants :
   E_1 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que Z est réel,
   E_2 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que Z est imaginaire pur,
   E_3 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que Z est élément de $\mathbb{R}_-^\star = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$.
   E_4 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que arg $Z = +\dfrac{\pi}{2}$.
   E_5 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que $|Z| = 1$.
3. Déterminer l'ensemble E_6 des points M dont l'affixe z est telle que $|Z| = 2$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On appelle θ la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$\theta(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(1+x).$$

1. h désigne la fonction numérique de la variable réelle définie par

   $$h(x) = x - \ln(1+x).$$

   Étudier le sens de variation de h et le signe de $h(x)$.
2. Quel est l'ensemble de définition de θ, D?
   Quelle est la limite de $\theta(x)$ quand x tend vers $+\infty$?
   Quelle est la limite de $\theta(x)$ quand x tend vers -1?
   On désigne par F l'application de $D \cup \{-1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

   $$\left\{\begin{array}{lcl} F(-1) & = & 0\\ F(x) & = & \theta(x),~\forall x \in D \cup \{-1\}.\end{array}\right.$$

   Étudier la dérivabilité en -1 de F.
3. Quelle est la limite de $\theta(x)$ quand x tend vers 0?
   On désigne par f l'application de $D \cup \{-1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

   $$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 1\\ f(x) & = & F(x),~\forall x \in D \cup \{-1\}.\end{array}\right.$$

   Étudiez la continuité et la dérivabilité en 0 de f.

4. Étudier les variations de f en utilisant en particulier 1.
Construire la courbe représentative de f.

PROBLÈME **12 POINTS**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
À tout nombre réel m, on associe :

— la translation t_m de vecteur $m\,\vec{\imath}$,

— l'affinité orthogonale a_m, d'axe la droite de repère $\left(\text{O},~\vec{\imath}\right)$ et de rapport e^{-m}. On note T_m l'application $t_m \circ a_m$.

Partie A

1. **a.** Préciser T_0.

   b. Démontrer l'égalité
   $$t_m \circ a_m = a_m \circ t_m.$$

   c. Démontrer que T_m est une bijection de P sur P, et expliciter la bijection réciproque T_m^{-1}.

2. **a.** Démontrer que si M a pour coordonnées $(x~;~y)$, les coordonnées $(x'~;~y')$ de $T_m(\text{M})$ sont
   $$x' = x + m \quad \text{et} \quad y' = \text{e}^{-m}y.$$

   b. On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = \text{e}^{-x}$; démontrer l'égalité
   $$T_m(\Gamma) = (\Gamma).$$

3. On désigne par (γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

   a. Déterminer une équation de $T_m(\gamma)$.
   Dans le cas où m n'est pas nul, on constatera que $T_m(\gamma)$ est une ellipse dont on précisera l'axe focal et les sommets; justifier que l'un des sommets de l'ellipse $T_m(\gamma)$ appartient à (Γ).

   b. Construire sur le même schéma les courbes (Γ), (γ), $T_{\frac{1}{2}}(\gamma)$ et $T_{-1}(\gamma)$. (On ne demande que les dessins des courbes).

Partie B

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lll} \forall x \in [0~;~2], & f(x) & = & x^2(2-x)\\ \forall x \in \mathbb{R}, & f(x+2) & = & f(x). \end{array}\right.$$

1. Étudier la restriction f_0 de f à l'intervalle $[0;2]$ et construire la courbe représentative de f_0.
   Comment peut-on en déduire la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[2n~;~2n+2]$ où n est élément de $\mathbb{R}$?

2. Démontrer que
   $$\forall x \in [2n~;~2n+2], \quad f(x) = (x-2n)^2(2n+2-x).$$

3. Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}$? Est-ce que f est dérivable sur $\mathbb{R}$?

Partie C

On considère l'application g de $[0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x).$$

1. On note g_0 la restriction de g à l'intervalle $[0 ; 2]$.

a. Étudier les variations de g_0 et construire sa courbe représentative $\mathscr{C}_0$.

b. Calculer $A_0 = \displaystyle\int_0^2 g_0(x)\,\mathrm{d}x$.

2. a. n étant un entier naturel et x un nombre réel positif ou nul, démontrer que

$$g(x+2) = \mathrm{e}^{-2} g(x),$$

puis exprimer $g(x+2n)$ en fonction de $g(x)$.

b. Démontrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_n$ de la restriction de g à l'intervalle $[2n ; 2n+2]$ est l'image de $\mathscr{C}_0$ par T_{2n}.

c. Démontrer que $A_n = \displaystyle\int_{2n}^{2n+2} g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2} A_0$.

d. On note : $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} A_p$: calculer S_n en fonction de n et de A_0 ; justifier que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

N.B. La partie B est indépendante du A