Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1985 ∽

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$, on considère l'application F qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = u^2 z + u - 1 \quad \text{où } u \in \mathbb{C}.$$

1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une translation ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ radians ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une homothétie de rapport - 2 ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
4. Caractériser F lorsque $u = 1 - \text{i}$.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère, dans le plan, deux droites D_1 et D_2 sécantes en O et une droite Δ qui n'est parallèle ni à D_1 ni à D_2.

1. **a.** Quel est l'ensemble des milieux des segments $[\text{A}_1\text{A}_2]$ tels que A_1 appartienne à D_1 A_2 appartienne à D_2 et tels que la droite (A_1A_2) soit parallèle à Δ.

   b. Montrer qu'il existe une symétrie et une seule ayant pour direction Δ qui transforme D_1 en D_2 et préciser son axe.
2. Pour tout point M du plan on effectue la construction suivante :
   la parallèle à D_2 passant par M coupe D_1 en P,
   la parallèle à D_1 passant par M coupe D_2 en Q,
   la parallèle à Δ passant par P coupe D_2 en Q$'$,
   la parallèle à Δ passant par Q coupe D_1 en P$'$,
   la parallèle à D_1 passant par Q$'$ et la parallèle à D_2 passant par P$'$ se coupent en M$'$.
   Démontrer que l'application qui à tout point M du plan associe le point M' est une symétrie dont on précisera l'axe et la direction.

PROBLÈME **12 points**

Les parties B et C sont indépendantes entre elles.

On considère l'application

$$\left\{\begin{array}{l l c l} f : &]0\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & \dfrac{1+2\ln x}{x^2}\end{array}\right.$$

On considère par ailleurs la fonction

$$\left\{\begin{array}{l l c l} \Phi : &]0\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}\end{array}\right.$$

On désigne respectivement par $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{H})$ les courbes représentatives de f et Φ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Partie A

Étude de la fonction f et tracé de la courbe $(\mathscr{C})$.

1. Étudier le sens de variation de f.
2. **a.** Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition. Préciser les droites asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$.
   b. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à l'axe des abscisses, et donner une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
3. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur une feuille de papier millimétré (unité : 4 cm).

Partie B

Positions relatives des courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{H})$ et détermination d'une valeur approchée de l'abscisse de l'un des points d'intersection.

1. **a.** Démontrer que la position relative des courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{H})$ peut se déduire du signe de $g(x) = (1+2\ln x) - x$.
   b. En utilisant les variations de la fonction g, prouver que l'équation
   $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0\,;2[$ et $]2\,;\,+\infty[$.
   On note α la solution appartenant à l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$; justifier l'encadrement :
   $3 < \alpha < 4$.
   c. Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x, et conclure sur la position relative des courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{H})$.
2. On cherche une valeur approchée du nombre réel α défini précédemment.
   a. Si on note h la fonction définie par : $h(x) = 1+2\ln x$, vérifier que les équations $g(x) = 0$ et $h(x) = x$ sont équivalentes. Préciser le sens de variation de h.
   b. On considère les nombres réels x' et x'' tels que : $1 < x' < \alpha < x''$, montrer que l'on a : $x' < h\left(x'\right) < \alpha < h\left(x''\right) < x''$.
   En déduire que l'on peut définir deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que l'on ait :
   $u_0 = 3$ et pour tout n élément de N, $u_{n+1} = h\left(u_n\right)$,
   $v_0 = 4$ et pour tout n élément de N, $v_{n+1} = h\left(v_n\right)$.
   Établir les propriétés suivantes :

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante,
- la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante,
- pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n < \alpha < v_n$
- les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

c. Vérifier que pour tout x élément de $[3\,;\,+\infty[$, on a : $0 < h'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$, et en déduire : pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $h(v_n) - h(u_n) \leqslant \dfrac{2}{3}(v_n - u_n)$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Quelle est la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

d. Donner un encadrement de α d'amplitude inférieure à 10^{-1} et proposer une valeur approchée de α.

3. Tracer la courbe $(\mathscr{H})$ sur le même graphique que la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie C

Calcul d'une primitive de f et calcul d'aires.

1. Justifier l'existence de primitives dè la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la primitive F de f telle que $F(1) = 0$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite ; donner une interprétation du résultat.

3. Calculer, en centimètres carrés, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la courbe $(\mathscr{H})$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \alpha$ (où α est le nombre réel défini en B 1. b.)

Montrer que cette aire s'exprime rationnellement en fonction de α, puis en donner une valeur approchée.