Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1986

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Soit le polynôme

$$P(z) = z^3 - 4z + \lambda$$

où z désigne un nombre complexe et λ un nombre réel.

1. Montrer que si $P(z) = 0$ admet une racine complexe z_θ, alors $\overline{z_\theta}$ est aussi solution.
   En déduire que l'équation $P(z) = 0$ admet au moins une solution réelle sans chercher à résoudre l'équation.
2. Déterminer λ pour que l'équation $P(z) = 0$ admette une racine réelle de module 2. Résoudre l'équation pour la valeur de λ trouvée.
3. Déterminer λ pour que l'équation $P(z) = 0$ admette une racine complexe de module 2.
   Résoudre l'équation pour les valeurs de λ trouvées et préciser le module et l'argument de chaque solution.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans le plan, on donne deux points distincts A et B.
Soit (D) la perpendiculaire à (AB) en B. On considère tous les cercles (C) du plan caractérisés par la propriété suivante : T et T′ étant deux points de contact des tangentes menées en A au cercle (C), le triangle ATT′ est équilatéral.

1. En étudiant le rapport des distances du centre d'un cercle (C) aux points A et B, déterminer et préciser la nature de l'ensemble des centres des cercles (C) qui passent par B.
2. Déterminer et préciser la nature de l'ensemble des centres des cercles (C) tangents à la droite (D).

N.B.- Pour faire la figure on prendra AB = 6 cm.

PROBLÈME **10 POINTS**

Partie A

Soit (E) l'équation différentielle du second ordre :

$$(e) \qquad y'' - 3y' + 2y = 0.$$

1. **a.** Quelles sont les solutions de (e).
   b. Quelle est la solution de (e) dont la courbe représentative (C) admet au point d'abscisse 0 la même tangente que la courbe (C′) représentative de $y = \mathrm{e}^{3x}$? On dit que (C) et (C′) sont tangentes.
2. Représenter dans un même repère orthonormal les courbes (C) et (C′) dont on précisera les positions relatives.
3. λ étant un réel strictement positif, soit h_λ les fonctions telles que

$$h_\lambda(x) = -\lambda^2\mathrm{e}^x + 2\lambda\mathrm{e}^{2x}.$$

   a. Montrer que h_λ est une solution de (e).

b. Soit (C_λ) la courbe représentative de ch_λ. Après avoir calculé en fonction de λ les coordonnées du point commun à (C_λ) et (C') montrer que les deux courbes sont tangentes en ce point.

c. Préciser les positions relatives de (C_λ) et (C').

Partie B

Soit (e') l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2 \qquad (e')$$

1. Trouver un polynôme P du second degré solution de l'équation (e').

2. On pose $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$.
Montrer que f est solution de (e') si, et seulement si, g est solution de l'équation (e).
En déduire les fonctions g solutions de (e').

3. Déterminer la solution de (e') dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(0\,;\,2)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.