∽ Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1989 ∾

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct d'origine O.
On note A et B les points ayant respectivement pour affixes 1 et i.
À tout point M d'affixe z on associe le point N d'affixe iz.

1. **a.** Identifier la transformation du plan ainsi définie.
   b. Lorsque M est distinct de A, déduire de a. une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AM}},\ \overrightarrow{\text{BN}}\right)$.
2. Déterminer et représenter sur une figure l'ensemble E des points M du plan distincts de A et B tels que MBN soit un triangle rectangle en B.
3. On se propose de déterminer le lieu D du milieu I du segment [MN] lorsque M parcourt E.
   a. *Première méthode*
   Lorsque M appartient à E prouver que les points M, B et N appartiennent au cercle de centre I passant par O.
   Tracer ce cercle. En déduire D et construire D.
   b. *Deuxième méthode*
   Déterminer une similitude directe S de centre O telle que, pour tout point M du plan, S(M) = I.
   En déduire D.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans une urne, il y a n boules rouges et $2n$ boules blanches.
On tire p boules au hasard sans remise.

1. Si $n = 5$ et $p = 4$, quelles sont les probabilités :
   a. d'obtenir deux boules rouges et deux boules blanches ?
   b. d'obtenir au moins une boule blanche ?
   On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.
2. Si n est un entier quelconque et $p = 2$.
   a. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir deux boules de couleurs différentes ?
   b. Quel est le sens de variation de la suite $\left(p_n\right)$?
   c. Déterminer la limite de cette suite.

PROBLÈME **11 POINTS**

Dans ce problème, la partie A. a pour objectif d'encadrer l'intégrale
$J(u) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - u^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$, où u est un nombre réel donné tel que $0 \leqslant u \leqslant 1$.
On ne cherchera pas à calculer $J(u)$.
Dans la partie B., on appliquera le résultat obtenu en A., pour encadrer la longueur d'une ellipse.

Partie A

1. Soit h un nombre réel tel que $0 \leqslant h \leqslant 1$.

a. Établir que :

$$1-\frac{h}{2}-\sqrt{1-h}=\frac{h^2}{4}\cdot\frac{1}{\varphi(h)},$$

où : $\varphi(h)=1-\dfrac{h}{2}+\sqrt{1-h}$.

b. Étudier le sens de variation de φ sur $[0\,;1]$.

c. En déduire la double inégalité :

$$1-\frac{h}{2}-\frac{h^2}{2}\leqslant\sqrt{1-h}\leqslant\frac{h}{2}. \qquad (1)$$

2. **a.** Calculer les deux intégrales :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t.$$

b. À l'aide de (1), établir la double inégalité, valable pour tout élément u de $[0\,;\;1]$:

$$\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{u^2}{4}-\frac{3}{16}u^4\right)\leqslant J(u)\leqslant\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{u^2}{4}\right). \qquad (2)$$

Partie B

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\;\vec{\imath},\;\vec{\jmath}\right)$, on considère l'ellipse (E) définie par la représentation paramétrique qui à tout réel $t\in[0\,;\;2\pi]$ associe : $x(t)=a\cos t$ et $y(t)=b\sin t$, où $0<b<a$.

1. On admet que la longueur L de cette ellipse (E) est donnée par :

$$\mathrm{L}=\int_0^{2\pi}\left\|\overrightarrow{V(t)}\right\|\,\mathrm{d}t,$$

où $\overrightarrow{V(t)}$ est le vecteur dérivé à l'instant t et $\left\|\overrightarrow{V(t)}\right\|$ sa norme.

a. Expliciter les coordonnées de $\overrightarrow{V(t)}$.

b. En déduire que $\mathrm{L}=4aJ(\mathrm{e})$, où e désigne l'excentricité de (E) et J est définie au début du problème.

c. Application numérique : $a=\dfrac{9}{2}$ et $b=4$.

En utilisant (2), donner un encadrement de la longueur L de cette ellipse, d'amplitude 0,25.

2. **a.** Soit M la longueur du cercle de centre O et de rayon $\dfrac{a+b}{2}$.

Exprimer M en fonction de a et e.

b. En encadrant $\sqrt{1-\mathrm{e}^2}$ grâce à (1), montrer que :

$$|\mathrm{M}-\mathrm{L}|\leqslant\frac{\pi a\mathrm{e}^4}{2}.$$