Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Amérique du Nord [1] juin 1991 ∽

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité 3 cm).

1. Soit $(\mathcal{H})$ l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient l'équation :

$$3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0.$$

   Montrer que $(\mathcal{H})$ est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et les asymptotes.

2. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe Z tels que les points A, M et M' d'affixes respectives 1, Z et Z^4 soient alignés. (On pourra poser $Z = x+\text{i}y$ et exprimer le nombre complexe $1 + Z + Z^2 + Z^4$ en fonction de x et y.)
   Construire l'ensemble E.

EXERCICE 2 **5 points**

Soient A, B, C trois points du plan non alignés tels que le triangle ABC ne soit pas équilatéral.
On désigne par A′, B′ et C′ les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].
On pose $a = \text{BC}$, $b = \text{CA}$ et $c = \text{AB}$.

1. On considère le vecteur $\vec{u} = a^2\,\overrightarrow{\text{BC}}^2 + b^2\,\overrightarrow{\text{CA}}^2 + c^2\,\overrightarrow{\text{AB}}^2$.
   Montrer que $\vec{u} = \left(a^2 - b^2\right)\overrightarrow{\text{AC}}^2 + \left(c^2 - a^2\right)\overrightarrow{\text{AB}}^2$.
   En déduire que $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul.
2. Pour tout point M du plan, on pose :

$$f(M) = a^2\,\overrightarrow{\text{BC}}\cdot\overrightarrow{M\text{A}'} + b^2\,\overrightarrow{\text{CA}}\cdot\overrightarrow{M\text{B}'} + c^2\,\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{M\text{C}'}.$$

   a. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, calculer $f(\text{O})$.
   b. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
   Montrer que $\overrightarrow{\text{BC}}\cdot\overrightarrow{\text{GA}'} = \dfrac{1}{6}\left(b^2 - c^2\right)$.
   En déduire la valeur de $f(\text{G})$.
   c. Déterminer l'ensemble D des points M du plan tels que $f(M) = 0$.

1. Espagne

PROBLÈME **11 points**

A- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1~;~1[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

1. **a.** Étudier la parité de f et calculer ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.

   b. Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité : 5 cm).

2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan compris entre la courbe $(\mathcal{C})$ l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

   On pourra faire une intégration par parties.

3. Pour tout réel $x \in \left[0~;~\frac{\pi}{2}\right[$, on pose :

   $$g(x) = f(\sin x).$$

   Montrer que la fonction g est une primitive sur l'intervalle $\left[0~;~\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction h telle que $h(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

B- Dans la suite du problème, a désigne un nombre réel de l'intervalle $\left[0~;~\frac{\pi}{2}\right[$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin^{2n} t}{\cos t}\,\text{d}t.$$

1. Montrer que $0 \leqslant I_n(a) \leqslant a\dfrac{\sin^{2n} a}{\cos a}$.
2. En déduire le limite de $I_n(a)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

C- Pour tout entier n entier supérieur ou égal à 1, on définit sur $[0~;~a]$ la fonction F_n par :

$$F_n(t) = \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5} + \cdots + \frac{\sin^{2n-1} t}{2n-1}.$$

1. Montrer que F_n est dérivable sur $[0~;~a]$ et que pour tout réel t de l'intervalle $[0~;~a]$:

   $$F_n'(t) = \frac{1-\sin^{2n} t}{\cos t}.$$

   Calculer $F_n(0)$.

2. En intégrant le relation précédente entre 0 et a, montrer que :

   $$F_n(a) = g(a) - I_n(a).$$

   En déduire la limite de $F_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On considère alors la suite u définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2^3} + \frac{1}{5 \times 2^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \times 2^{2n-1}}.$$

a. Montrer, en utilisant C b. et B 1., que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_n est une valeur approchée de $\ln \sqrt{3}$ à $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ près par défaut.

b. En déduire, sous forme de fraction irréductible, une valeur approchée de $\ln \sqrt{3}$ à 10^{-2} près par défaut.